

Grundpraktikum der Physik für Ingenieure an der Universität Ulm

—

Grundlagen zu den Versuchen

Michael Sauter Bruno Schiele

6. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Pendelschwingungen	6
1.1	Die Analogie zwischen Translationsbewegungen und Rotationsbewegungen	6
1.2	Das mathematische Pendel	6
1.3	Das physikalische Pendel	7
1.4	Das Verhalten bei größeren Auslenkungen	9
1.5	Das Reversionspendel	10
1.6	Gekoppelte Pendel	11
1.6.1	Die gleichsinnige Schwingung (1. Normalschwingung)	12
1.6.2	Die gegensinnige Schwingung (2. Normalschwingung)	13
1.6.3	Der Schwebungsfall	13
1.6.4	Der Kopplungsgrad	14
2	Drehpendel	15
2.1	Die freie ungedämpfte Schwingung	15
2.2	Die freie gedämpfte Schwingung	15
2.3	Die erzwungene Schwingung	17
3	Drillachse	19
3.1	Das Trägheitsmoment	19
3.2	Zusammenhang von Drehmoment und Drehimpuls	19
3.3	Der Trägheitstensor	20
3.4	Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße einer Drillachse	21
3.5	Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße einer Drillachse	21
3.6	Bestimmung des Eigenträgheitsmoments einer Drillachse	22
3.7	Berechnung von Trägheitsmomenten verschiedener Körper	22
3.7.1	Die flache Scheibe	22
3.7.2	Der Vollzylinder	23
3.7.3	Der Hohlzylinder	23
3.7.4	Die Vollkugel	24
3.8	Der Satz von Steiner	24
3.9	Das Trägheitsmoment eines Zylinders bezüglich einer Drehachse, die senkrecht zur Zylinderachse steht	25
4	Viskosität und Oberflächenspannung	26
4.1	Viskosität	26
4.2	Strömungsarten und Reynoldszahl	27
4.3	Das Stokessche Gesetz	27
4.4	Oberflächenspannung	28
4.4.1	Typische Oberflächenspannungen	29
4.4.2	Verhalten bei Verunreinigungen	29
4.4.3	Verhalten bei Temperaturänderung	29
4.5	Experimentelle Bestimmung von Oberflächenspannungen	29

4.5.1	Die Abreißmethode	29
4.5.2	Die Blasendruckmethode	30
4.6	Überdruck in einer Gasblase (z.B. Seifenblase)	30
5	Schallgeschwindigkeit und Adiabatenexponent	31
5.1	Schallwellen in unterschiedlichen Materialien	31
5.1.1	Schallgeschwindigkeit im Festkörper	31
5.1.2	Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten	32
5.1.3	Schallgeschwindigkeit in Gasen	32
5.2	Die Kundtsche Röhre	32
5.3	Das Quinckesche Resonanzrohr	33
5.4	Zustandsänderungen	34
5.4.1	Isochore Zustandsänderung	34
5.4.2	Isobare Zustandsänderung	34
5.4.3	Isotherme Zustandsänderungen	35
5.4.4	Adiabatische Zustandsänderungen	35
5.5	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Rüchardt	36
5.6	Zusammenhang zwischen dem Adiabatenexponenten und den Freiheitsgraden eines idealen Gases	38
5.6.1	Gleichverteilungssatz	38
5.6.2	Dar Adiabatenexponent abhängig von der Zahl der Freiheitsgrade	38
6	Spezifische Wärmekapazität	38
6.1	Was ist Wärme?	38
6.2	Die Wärmekapazität	39
6.3	Bestimmung der Wärmekapazität eines Kalorimetergefäßes	39
6.4	Bestimmung von spezifischen Wärmekapazitäten durch Mischungskalorimetrie	40
6.5	Das Thermoelement	40
7	Latente Wärmen	41
7.1	Latente Wärme	41
7.2	Phasendiagramme	42
7.3	Bestimmung der Wärmekapazität eines Kalorimetergefäßes	43
7.4	Bestimmung der spezifischen Schmelzwärme von Eis	44
7.5	Bestimmung der spezifischen Verdampfungswärme von Wasser	44
7.5.1	Die Verdampfungsmethode	44
7.5.2	Die Kondensationsmethode	45
8	Fresnelsche Formeln	46
8.1	Das Snelliussche Brechungsgesetz	46
8.2	Reflexion und Brechung am optisch dichteren Medium	47
8.3	Die Fresnelschen Formeln	47
8.4	Der Verlauf der Reflexionskoeffizienten	50

8.5	Der Brewsterwinkel	50
9	Linsensysteme	51
9.1	Dicke Linsen	51
9.2	Strahlengänge für verschiedene Linsenarten	51
9.2.1	Sammellinsen	51
9.2.2	Zerstreuungslinsen	52
9.2.3	Die Abbildungsgleichung	53
9.2.4	Der Abbildungsmaßstab	53
9.3	Bestimmung von Linsenbrennweiten	54
9.3.1	Autokollimation	54
9.3.2	Bessel-Verfahren	54
9.3.3	Abbildungsverfahren	55
9.3.4	Linsensysteme	55
9.4	Linsenfehler	56
9.4.1	Sphärische Aberration	56
9.4.2	Chromatische Aberration	57
9.4.3	Astigmatismus	57
9.4.4	Koma	57
9.5	Konstruktion des Strahlengangs durch ein Linsensystem	58
9.6	Optische Instrumente	59
9.6.1	Die Lupe	59
9.6.2	Das Mikroskop	60
9.6.3	Das astronomische Fernrohr	60
10	Polarisation, Doppelbrechung und Beugung	61
10.1	Polarisation von Licht	61
10.1.1	Linear polarisiertes Licht	62
10.1.2	Zirkular bzw. elliptisch polarisiertes Licht	62
10.2	Erzeugung von polarisiertem Licht	63
10.2.1	Erzeugung durch Polarisationsfilter	63
10.2.2	Polarisation durch Reflexion	63
10.2.3	Polarisation durch Doppelbrechung	64
10.3	Fraunhofer-Beugung am Einzelspalt	65
10.4	Fraunhofer-Beugung am Strichgitter	67
10.5	Mathematische Berechnung der Beugungsfigur	68
10.5.1	Vergleich mit der zeitlichen Fourier-Transformation	69
11	Michelson Interferometer	69
11.1	Licht als elektromagnetische Welle	69
11.1.1	Die Wellengleichung	69
11.1.2	Polarisation von Licht	71
11.2	Die Intensität des Lichts	72
11.2.1	Der Poyntingvektor	72

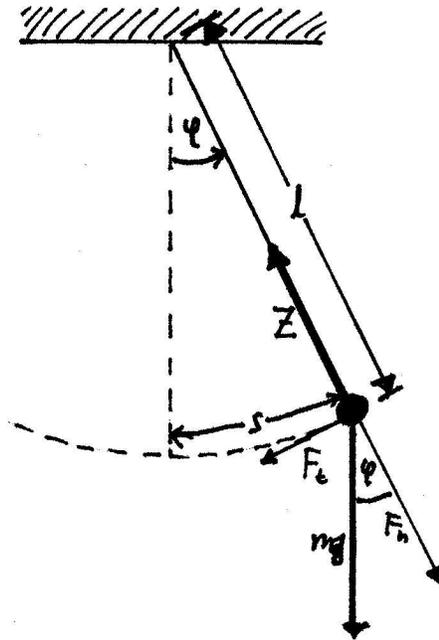
11.2.2 Die Intensität der Welle	72
11.3 Interferenz	73
11.3.1 Voraussetzungen für Interferenz	73
11.3.2 Interferenz gleicher Neigung	74
11.3.3 Interferenz gleicher Dicke	75
11.4 Das Michelson-Interferometer	76
11.4.1 Bestimmung von Wellenlängen mit dem Michelson-Interferometer .	77
11.5 Das Abbe-Refraktometer	78
12 Spektrometer	79
12.1 Das Prisma	79
12.1.1 Ablenkung eines Lichtstrahles durch ein optisches Prisma	79
12.1.2 Winkeldispersion	80
12.2 Das Auflösungsvermögen	80
13 Temperaturstrahlung	83
13.1 Was ist Wärmestrahlung	83
13.2 Der Schwarze Körper	83
13.3 Das Kirchhoffsche Gesetz	84
13.4 Die Gesetze der optischen Strahlungsenergie und -leistung	84
13.4.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz	84
13.4.2 Das Stefan-Boltzmann-Gesetz	86
13.4.3 Das Rayleigh-Jeanssche Gesetz	86
13.4.4 Das Wiensche Strahlungsgesetz	86
13.4.5 Das Wiensche Verschiebungsgesetz	87
13.5 Die Abhängigkeit der Strahlungsleistung vom Raumwinkel	87
13.6 Pyrometrie	89

1 Pendelschwingungen

1.1 Die Analogie zwischen Translationsbewegungen und Rotationsbewegungen

Translation	Rotation
Ort \vec{x}	\leftrightarrow Auslenkungswinkel φ
Kraft \vec{F}	\leftrightarrow Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Masse m	\leftrightarrow Trägheitsmoment $I = \int \vec{r}^2 \rho(\vec{r}) dV$
Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$	\leftrightarrow Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\dot{\varphi}\vec{e}$, wobei \vec{e} der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse ist.
$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{x}}$	\leftrightarrow $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = I\ddot{\varphi}\vec{e}$ (2. Newtonsches Gesetz)

1.2 Das mathematische Pendel



Ein mathematisches Pendel ist immer eine Idealisierung: Eine punktförmige Masse hängt an einem masselosen Faden. Um dies in der Realität möglichst gut darzustellen benötigen wir einen sehr langen, sehr dünnen Faden und daran eine möglichst schwere und möglichst wenig ausgedehnte Kugel. Auf diese wirken die Gewichtskraft mg und die Zugkraft Z . Ist das Pendel um den Winkel φ zur Vertikalen ausgelenkt, so wirkt entgegen der Zugkraft ein Anteil der Gewichtskraft von $F_n = -Z = mg \cos \varphi$, sowie senkrecht dazu ein Anteil von $F_t = -mg \sin \varphi$, welche die Kugel zur Gleichgewichtslage zurücktreibt. Außerdem gilt für die vom tiefsten Punkt aus gemessene Bogenlänge

$$s = l\varphi$$

Die Tangentialkomponente der Kugelbeschleunigung ist $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2(l\varphi)}{dt^2}$. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz, $F = ma$, gilt

$$-mg \sin \varphi = m \frac{d^2(l\varphi)}{dt^2}$$

oder

$$\frac{d^2(l\varphi)}{dt^2} = -g \sin \varphi$$

und da l zeitunabhängig ist

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

Dies nennen wir die *Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels*. Ist der Winkel φ klein, so können wir $\sin \varphi$ durch den Winkel φ selbst annähern. Wir erhalten also:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Für kleine Winkel, bei denen die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ zutrifft, ist die rücktreibende Beschleunigung proportional zur Auslenkung. Die Pendelbewegung ist also für kleine Auslenkungen annähernd eine harmonische Schwingung und wir schreiben deshalb:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\varphi$$

mit $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Die Lösung dieser *Differentialgleichung* lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

wobei φ_0 der maximale Auslenkungswinkel und δ eine von den Anfangsbedingungen festgelegte Phasendifferenz ist. Die Kreisfrequenz ist damit

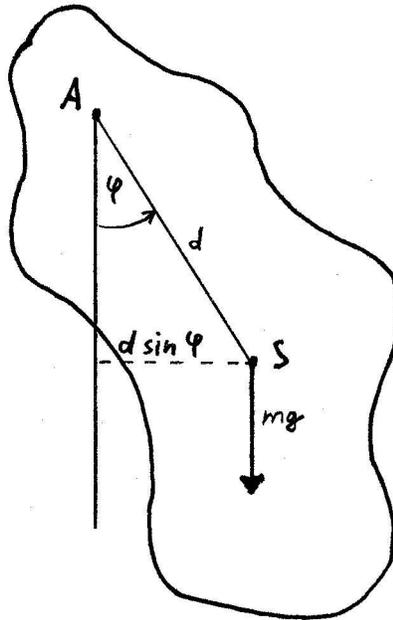
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Und die Schwingungsdauer einer Periode ergibt sich zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.3 Das physikalische Pendel

Ein starrer ausgedehnter Körper, der nicht in seinem Schwerpunkt aufgehängt wird, kann nach einer Auslenkung aus seiner Gleichgewichtslage schwingen und wird deshalb physikalisches Pendel genannt.



Das Gebilde in der Grafik wurde in einem Punkt A im Abstand d vom Schwerpunkt S aufgehängt und um den Winkel φ aus der Ruhelage ausgelenkt. Winkelbeschleunigung α und Drehmoment M hängen über

$$M = I\alpha = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

zusammen, wobei I das Trägheitsmoment der Figur bezüglich des Aufhängepunktes A ist, und nach dem *Satz von Steiner*¹ folgendermaßen aus dem Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes I_S und der Masse des Pendels m berechnet werden kann:

$$I = I_S + md^2$$

Das hier wirkende rücktreibende Drehmoment $M = -mgd \sin \varphi$ ergibt eingesetzt in die obere Gleichung die *Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels*:

$$-mgd \sin \varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \sin \varphi$$

Für die Bedingungen des mathematischen Pendels gilt mit dem Satz von Steiner $I = ml^2$ und $d = l$. Setzt man dieses oben ein, so erhalten wir die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels, woraus klar wird, dass das mathematische Pendel ein Spezialfall des physikalischen Pendels ist. Auch beim physikalischen Pendel ergibt sich somit bei

¹aus Paul A. Tipler: „Physik“, Spektrum (Heidelberg, Berlin, Oxford), 2000

kleinen Winkeln eine nahezu harmonische Schwingung, und es gilt wieder $\sin \varphi \approx \varphi$. In diesem Fall erhalten wir

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\varphi$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\varphi$$

mit $\omega^2 = \frac{mgd}{I}$. Die Lösung dieser *Differentialgleichung* lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

wobei φ_0 der maximale Auslenkungswinkel und δ eine von den Anfangsbedingungen festgelegte Phasendifferenz ist. Die Kreisfrequenz ist damit

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Und die Schwingungsdauer einer Periode ergibt sich zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

1.4 Das Verhalten bei größeren Auslenkungen

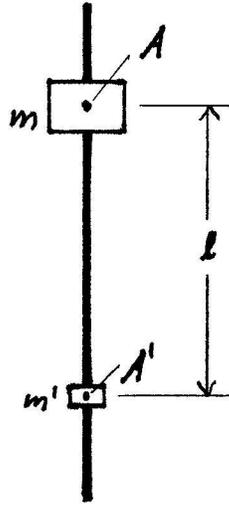
Die oben gemachten Näherungen gelten nur bei kleinen Auslenkungen. Im Allgemeinen hängt die Schwingungsdauer T von der Winkelamplitude φ_0 folgendermaßen ab²:

$$T = T_k \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]$$

mit dem Näherungswert $T_k = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ beim physikalischen bzw. $T_k = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ beim mathematischen Pendel von oben.

²aus Wilhelm Walcher: „Praktikum der Physik“, Teubner (Stuttgart), 1994

1.5 Das Reversionspendel



Ein Reversionspendel besteht aus einem Stab, an dem die zwei im Allgemeinen verschiedenen Massen m und m' im Abstand l angebracht sind. Jeweils in der Mitte der Massen befindet sich ein Aufhängungspunkt, um den das Pendel schwingen kann. Durch Verändern des Abstandes zwischen den beiden Massen lässt sich die Schwingungsdauer T für Schwingung um A und T' für Schwingung um A' verändern. Im abgeglichenen Zustand ist $T = T'$ und wir können eine *reduzierte Pendellänge* l_r messen. Ein mathematisches Pendel dieser Länge würde mit genau derselben Schwingungsdauer T schwingen. Daher lässt sich ziemlich genau die Erdbeschleunigung bestimmen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

also

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l_r$$

Zur Begründung: Im abgeglichenen Zustand schwingt das physikalische Reversionspendel genauso schnell wie ein mathematisches Pendel der Länge l_r , es gilt also

$$\sqrt{\frac{l_r}{g}} = \sqrt{\frac{I_A}{mgr}}$$

mit r als Abstand des Punktes A vom Schwerpunkt S und damit

$$l_r = \frac{I_A}{mgr}g = \frac{I_A}{mr}$$

Für die Schwingung um A gilt

$$\omega_A = \sqrt{\frac{mgr}{I_A}}$$

mit Abstand r zwischen A und Schwerpunkt S und dem Trägheitsmoment I_A bezüglich dem Drehpunkt A . Für den Drehpunkt A' gilt damit

$$\omega_{A'} = \sqrt{\frac{mg(l-r)}{I_{A'}}$$

mit Abstand $l-r$ zwischen A' und Schwerpunkt S und dem Trägheitsmoment $I_{A'}$ bezüglich dem Drehpunkt A' .

Mit dem Satz von Steiner gilt für das Trägheitsmoment um A'

$$I_{A'} = I_S + m(l-r)^2$$

Daraus folgt

$$\omega_{A'} = \sqrt{\frac{mg(l-r)}{I_S + m(l-r)^2}} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{I_S}{l-r} + m(l-r)}} \quad (1)$$

Außerdem gilt (s. oben)

$$l = l_r = \frac{I_S + mr^2}{mr}$$

und damit

$$l-r = \frac{I_S + mr^2}{mr} - r = \frac{I_S}{mr}$$

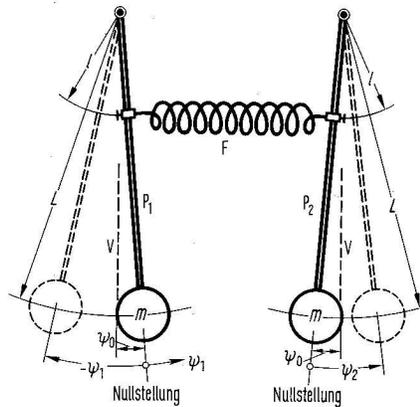
Dies in (1) eingesetzt erhalten wir

$$\omega_{A'} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{I_S}{\frac{I_S}{mr}} + m \frac{I_S}{mr}}} = \sqrt{\frac{mg}{mr + \frac{I_S}{r}}} = \sqrt{\frac{mgr}{mr^2 + I_S}}$$

Daraus folgt mit $mr^2 + I_S = I_A$

$$\omega_{A'} = \sqrt{\frac{mgr}{I_A}} = \omega_A$$

1.6 Gekoppelte Pendel



Zwei gleiche Schwerependel sind über eine dünne Wendelfeder miteinander gekoppelt. In der Ruhestellung hängen sie daher nicht in ihrer Vertikalen V , sondern in der um den Winkel ψ_0 nach innen versetzten *Nullstellung*. Dabei ist das durch die Feder erzeugte Drehmoment $M_{F,0} = -D_F x_0 l$ (mit Richtkraft der Feder D_F und Verlängerung gegenüber dem entspannten Zustand x_0) entgegengesetzt gleich dem durch die Schwerkraft erzeugten Drehmoment $M_{S,0} = mgL\psi_0$. Lenkt man nun P_2 bei festgehaltenem P_1 um den Winkel ψ_2 aus der Nullstellung aus, so wirkt nun insgesamt das Drehmoment

$$M_2 = -mgL(\psi_2 - \psi_0) - D_F(x_0 - l\psi_2)l = -mgL\psi_2 - D_F l^2 \psi_2$$

Verschiebt man außerdem P_1 um ψ_1 , so wirkt insgesamt das Drehmoment

$$M_2 = -mgL\psi_2 - D_F l^2 \psi_2 + D_F l^2 \psi_1 = -mgL\psi_2 - D_F l^2 (\psi_2 - \psi_1)$$

und analog auf P_1

$$M_1 = -mgL\psi_1 + D_F l^2 (\psi_2 - \psi_1)$$

Lässt man die Pendel nun los, so bewirken die Drehmomente M_1 und M_2 die Winkelbeschleunigungen $\ddot{\psi}_1 = \frac{M_1}{I}$ bzw. $\ddot{\psi}_2 = \frac{M_2}{I}$, wobei I das Trägheitsmoment der Pendel ist. Daraus ergeben sich die gekoppelten Schwingungsgleichungen

$$I\ddot{\psi}_1 = M_1 = -mgL\psi_1 + D_F l^2 (\psi_2 - \psi_1)$$

$$I\ddot{\psi}_2 = M_2 = -mgL\psi_2 - D_F l^2 (\psi_2 - \psi_1)$$

oder nach Umformung

$$\ddot{\psi}_1 + \omega_0^2 \psi_1 = -\Omega^2 (\psi_1 - \psi_2)$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_0^2 \psi_2 = -\Omega^2 (\psi_2 - \psi_1)$$

mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = \frac{mgL}{I}$ und $\Omega^2 = \frac{D_F l^2}{I}$

1.6.1 Die gleichsinnige Schwingung (1. Normalschwingung)

Lenkt man beide Pendel um den gleichen Winkel ψ_a aus ihrer Nullstellung aus und lässt sie zum Zeitpunkt $t = 0$ los, dann schwingen beide gleichphasig mit der Kreisfrequenz

$$\omega_{\text{gl}} = \omega_0$$

Dieser Schwingungstyp ist unabhängig von der Stärke der Kopplung. Die Anfangsbedingungen lauten

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_a$$

$$\dot{\psi}_1(0) = \dot{\psi}_2(0) = 0$$

und führen auf die Lösungen

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_a \cos(\omega_0 t)$$

1.6.2 Die gegenseitige Schwingung (2. Normalschwingung)

Lenkt man P_1 um den Winkel $\psi_1 = -\psi_a$, P_2 hingegen um $\psi_2 = +\psi_a$ aus ihrer Nullstellung aus und lässt beide zum Zeitpunkt $t=0$ los, dann schwingen beide mit gleicher Frequenz ω_{geg} , jedoch gegenphasig. Da die Feder hier ständig gespannt und entspannt wird, ist naheliegend, dass hier die Federeigenschaften starken Einfluss auf die Schwingungsdauer haben. Die Anfangsbedingungen lauten hier

$$\begin{aligned} -\psi_1(0) &= \psi_2(0) = \psi_a \\ \dot{\psi}_1(0) &= \dot{\psi}_2(0) = 0 \end{aligned}$$

und führen auf die Lösungen

$$\psi_1(t) = -\psi_2(t) = \psi_a \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}t\right)$$

Daraus kann man erkennen, dass die Kreisfrequenz

$$\omega_{\text{geg}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$$

wesentlich von $\Omega = \sqrt{\frac{D_F l^2}{I}}$ bestimmt wird.

1.6.3 Der Schwebungsfall

Wird P_2 festgehalten, P_1 um $\psi_1 = \psi_a$ aus seiner Nullstellung ausgelenkt und beide zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen, dann schwingt zunächst nur P_1 . Mit der Zeit wird jedoch über die Feder Schwingungsenergie auf P_2 übertragen, bis P_1 zur Ruhe gekommen ist. P_2 besitzt dann volle Schwingungsenergie und der Vorgang wiederholt sich in umgekehrter Weise. Zur Beschreibung des Vorgangs setzen wir die Anfangsbedingungen der gekoppelten Schwingungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_a \\ \psi_2(0) &= 0 \\ \dot{\psi}_1(0) &= \dot{\psi}_2(0) = 0 \end{aligned}$$

und erhalten damit die Lösungen

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_a \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}t\right) \\ \psi_2(t) &= -\psi_a \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}t\right) \end{aligned}$$

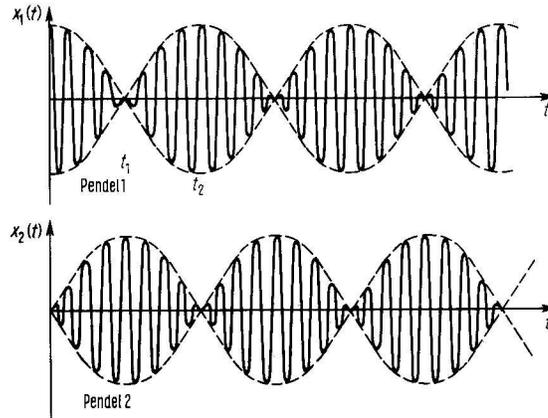
Bei nicht zu starker Kopplung, also wenn $\omega_0 \gg \Omega$, ist die Kreisfrequenz des ersten Anteils

$$\omega_{\text{I}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \approx \frac{\Omega^2}{2\omega_0}$$

relativ klein gegen die Kreisfrequenz des zweiten Anteils

$$\omega_{\text{II}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \approx \omega_0 + \frac{\Omega^2}{2\omega_0}$$

Die erste Funktion in den Lösungsgleichungen kann daher als langsam veränderliche Amplitudenfunktion gesehen werden, welche die Amplitude der schnelloszillierenden zweiten Funktion moduliert.



Schwebungen können auch in anderen Bereichen der Physik auftreten und zwar immer, wenn sich zwei Schwingungen mit geringfügig unterschiedlicher Frequenz überlagern. Die Schwebung stellt dann immer eine Amplitudenmodulation mit der Kreisfrequenz $\omega_S = \omega_1 - \omega_2$. Beispiele hierfür sind:

- Akustik: Zwei geringfügig unterschiedliche Töne ergeben einen Ton mit ständig an- und abschwelliger Lautstärke.
- Optik: Überlagern sich die Interferenzmuster von Licht mit geringfügig verschiedener Wellenlänge, so ergeben sich Schwebungen der Intensität des Interferenzbildes.

1.6.4 Der Kopplungsgrad

Als Kopplungsgrad definiert man das Verhältnis

$$K = \frac{D_F l^2}{mgL + D_F l^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2}$$

K lässt sich aus verschiedenen unabhängig voneinander zu messenden Größen berechnen. Aus den Kreisfrequenzen der gleichsinnigen und gegensinnigen Schwingungen ergibt sich

$$K = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2}$$

und aus den Kreisfrequenzen des Schwebungsfalls erhalten wir

$$K = \frac{2\omega_I\omega_{II}}{\omega_I^2 + \omega_{II}^2}$$

2 Drehpendel

2.1 Die freie ungedämpfte Schwingung

Wir betrachten das oben gezeigte Drehpendel. Die Schubstange soll für die freie Schwingung in Ruhe sein. Wird ein Zeitpunkt betrachtet, in dem das Drehpendel um den Winkel ψ aus seiner Ruhelage ausgelenkt ist und in diesem Moment die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ hat, so wirkt zu diesem Zeitpunkt auf das Drehpendel das Drehmoment $M_1 = -D\psi$ mit dem Richtmoment der Spiralfeder D . Dieses Moment bewirkt eine Drehbeschleunigung, wobei $M = J_A\ddot{\psi}$ mit dem Trägheitsmoment J_A des Drehpendels um die Drehachse A gilt. Wir erhalten also durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen ($M = M_1$) die Bewegungsgleichung für die freie ungedämpfte Schwingung als

$$\ddot{\psi} + \frac{D}{J_A}\psi = 0$$

Hieraus erkennt man sofort die Lösung der Differentialgleichung:

$$\psi(t) = \psi_0 \cos \omega_0 t$$

wenn $\omega_0^2 = \frac{D}{J_A}$ gilt. Damit ist ω_0 die Kreisfrequenz des Drehpendels für die freie ungedämpfte Schwingung.

2.2 Die freie gedämpfte Schwingung

Wird an das Drehpendel noch eine Schwingungsdämpfung in Form einer Wirbelstrombremse angebracht, so wirkt zu M_1 ein zusätzliches Drehmoment $M_2 = -C\dot{\psi}$, wobei C eine durch den Spulenstrom einstellbare Größe ist. Wieder setzen wir $M = M_1 + M_2$ und erhalten damit die Bewegungsgleichung für die gedämpfte Schwingung als

$$\ddot{\psi} + \frac{C}{J_A}\dot{\psi} + \frac{D}{J_A}\psi = 0$$

oder mit $\omega_0^2 = \frac{D}{J_A}$ und $\delta = \frac{C}{2J_A}$

$$\ddot{\psi} + 2\delta\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0$$

Ein geeigneter Lösungsansatz hierfür ist $\psi(t) = Ae^{\lambda t}$. Dies oben eingesetzt ergibt

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

und mit der Mitternachtsformel

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Die allgemeine Lösung muss also

$$\psi(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

lauten. Wird das Drehpendel zum Zeitpunkt $t = 0$ bei der Auslenkung ψ_0 losgelassen, so gelten also folgende Anfangsbedingungen:

$$\psi(0) = \psi_0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Die erste Bedingung in die allgemeine Lösung eingesetzt ergibt

$$\psi_0 = A_1 + A_2$$

Die zweite Bedingung ergibt mit der zeitlichen Ableitung der allgemeinen Lösung

$$A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0$$

und somit

$$A_1 = -\psi_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$A_2 = \psi_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Die eingesetzt in die allgemeine Lösung ergibt die spezielle Lösung

$$\psi(t) = \frac{\psi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \right)$$

Vorausgesetzt, dass ω_0 und δ positive, reelle Größen sind, ergeben sich für die Wurzel $\sqrt{\delta^2 - \lambda_0^2}$ in der Gleichung für Lambda drei verschiedene Fälle:

1. Ist $\delta > \omega_0$, also die Dämpfung sehr groß gegen die Eigenfrequenz des Pendels, so wird die Wurzel reell und $\delta > \sqrt{\delta^2 - \lambda_0^2}$. Damit werden λ_1 und λ_2 reell und negativ. Dies hat zur Folge, dass das Pendel nicht schwingt, sondern in seine Ruhelage „zurückkriecht“. Daher nennt man diesen Fall auch den *Kriechfall*.
2. Für $\delta = \omega_0$ verschwindet die Wurzel. Man spricht dann vom aperiodischen Grenzfall. Das System geht dann sofort nach der Anregung in seine Ruhelage zurück und schwingt nicht.
3. Im für uns bedeutenden 3. Fall $\delta < \omega_0$ wird die Wurzel und damit auch λ_1 und λ_2 komplex. Werden diese in die spezielle Lösung eingesetzt erhalten wir

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right)$$

mit der durch die Dämpfung verringerten Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Wählen wir nun für den dritten Fall die Anfangsbedingungen wie oben, so vereinfacht sich die Lösung der Bewegungsgleichung zu

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$$

Da das Verhältnis der Amplituden zweier aufeinanderfolgender Ausschläge konstant ist, nennen wir dieses das *Dämpfungsverhältnis* k . Es lässt sich sehr einfach zu

$$k = \frac{\psi(t+T)}{\psi(t)} = \frac{e^{-\delta(t+T)}}{e^{-\delta t}} = e^{-\delta T}$$

berechnen. Damit lässt sich durch Messung der Amplituden auch die Dämpfungskonstante

$$\delta = \frac{\log k}{T}$$

bestimmen und wir definieren außerdem das *logarithmische Dämpfungsdekrement* zu

$$\Lambda = \delta T = \log k$$

Damit können wir einen Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer T der gedämpften Schwingung und der Dauer T_0 der ungedämpften Schwingung ableiten. Es gilt dann

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\Lambda}{4\pi^2}}$$

2.3 Die erzwungene Schwingung

Wird nun die Schubstange in eine periodische Bewegung mit der Kreisfrequenz ω_a versetzt, so wirkt auf das Drehpendel ein weiteres Drehmoment $M_a = D\chi = D\chi_0 \cos \omega_a t = M_0 \cos \omega_a t$. Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichung folgendes:

$$J_A \ddot{\psi} + C \dot{\psi} + D\psi = M_0 \cos \omega_a t$$

oder

$$\ddot{\psi} + 2\delta \dot{\psi} + \omega_0^2 \psi = \alpha_0 \cos \omega_a t$$

mit $\delta = \frac{C}{2J_A}$, $\omega_0^2 = \frac{D}{J_A}$ und $\alpha_0 = \frac{M_0}{J_A}$. Der homogene Anteil wurde ja schon bei der freien Schwingung berechnet. Wir benötigen also nur noch eine partikuläre Lösung für die erzwungene Schwingung, welche sich aus der Annahme ergibt, dass das System wohl mit der antreibenden Frequenz schwingen muss. Es gilt also

$$\psi(t) = \psi_a \cos(\omega_a t - \varphi)$$

Hier sind jetzt noch die Amplitude und die Phasenverschiebung unbekannt. Die Phasenverschiebung φ ergibt sich jedoch einfach durch Einsetzen der Lösung in die Bewegungsgleichung:

$$(\omega_0^2 - \omega_a^2) \sin \varphi - 2\delta \omega_a \cos \varphi = 0$$

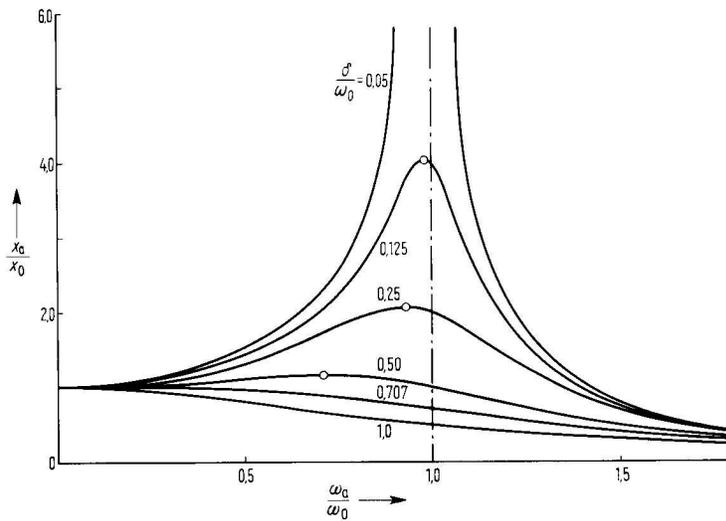
also

$$\varphi(\omega_a) = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}\right)$$

Damit kommen wir schließlich auch zur Amplitude der Schwingung:

$$\psi_a(\omega_a) = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

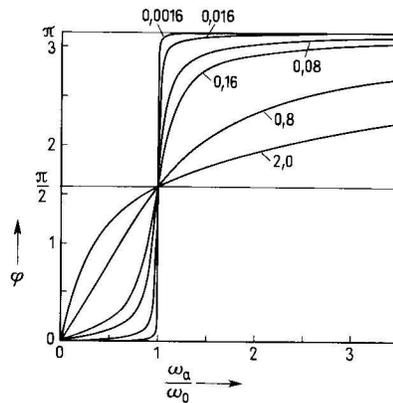
Die Amplitude der erzwungenen Schwingung als Funktion der Erregerfrequenz wird im folgenden Diagramm für verschiedene Dämpfungskonstanten dargestellt, wobei die Kurve mit der Polstelle bei ω_0 für den Idealfall ohne Dämpfung gilt.



Man kann hier gut erkennen, dass die Amplitude bei größerer Dämpfung geringer wird, was auch logisch erscheint. Außerdem verschiebt sich die Resonanzfrequenz mit größer werdender Dämpfung nach unten. Für die Resonanzfrequenz gilt

$$\omega_R(\delta, \omega_0) = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

was sich durch Ableiten und Nullsetzen der Amplitudenfunktionen ergibt. Die Phasendifferenz über der Erregerfrequenz aufgetragen ergibt folgendes Schaubild für verschiedene Dämpfungskonstanten:



Wie man erkennen kann, ist die Phasendifferenz bei $\omega_a = \omega_0$ unabhängig von der Dämpfung immer $\frac{\pi}{2}$ und steigt mit wachsendem ω_a von 0 auf π , und zwar umso schneller, je geringer die Dämpfung.

3 Drillachse

3.1 Das Trägheitsmoment

Die Definition des Trägheitsmoments eines Teilchensystems lautet

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

Hat ein Körper eine kontinuierliche Massenverteilung, so gilt

$$J = \int r^2 dm$$

Das Trägheitsmoment entspricht bei der Rotationsbewegung der trägen Masse m bei der Translation.

3.2 Zusammenhang von Drehmoment und Drehimpuls

Analog zum Translationsimpuls besitzt die Rotation einen Rotationsimpuls (Drehimpuls):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

oder wenn $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

Das Drehmoment ist definiert als

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

oder durch Anwendung des Vektorprodukts

$$M = Fr \sin \Phi$$

Analog zum Newtonschen Gesetz ($F = ma$) lässt sich eine entsprechende Beziehung für die Rotation aufstellen. Hier entspricht dann der Kraft F das Drehmoment M , der Masse m das Trägheitsmoment J und der Beschleunigung a die Winkelbeschleunigung α . Es gilt dann also

$$M = J\alpha$$

Zwischen Drehmoment und Drehimpuls besteht nun folgender Zusammenhang: Jede Änderung des Drehimpulses bewirkt ein Drehmoment.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = J \frac{\partial \omega}{\partial t} = J\alpha = M$$

3.3 Der Trägheitstensor

Da im allgemeinen L und ω nicht parallel zueinander sind, führt man den sogenannten Trägheitstensor ein. Diese Darstellung beschreibt den Zusammenhang zwischen L und ω korrekt. Der Trägheitstensor stellt eine 3×3 -Abbildungsmatrix dar, die ω auf L abbildet, und sieht folgendermaßen aus:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Damit gilt dann $\vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega}$ allgemein.

Die Hauptdiagonal-Elemente (Hauptträgheitsmomente) bilden sich aus

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$J_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$J_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

und die Nebendiagonal-Elemente (Deviationselemente) aus

$$J_{xy} = \int xy dm$$

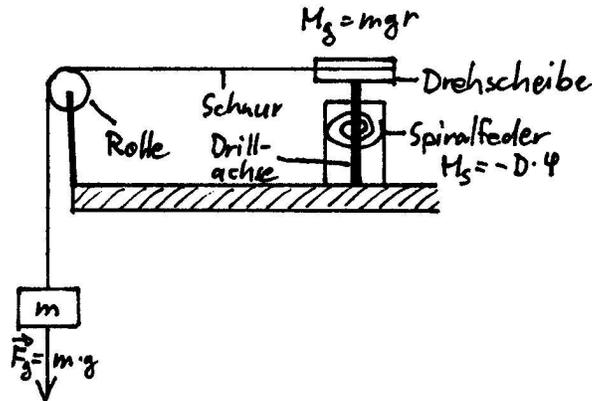
$$J_{xz} = \int xz dm$$

$$J_{yz} = \int yz dm$$

Mit diesem Trägheitstensor lässt sich das Trägheitsmoment für jede beliebige Drehachse bestimmen, auch wenn diese schräg zur Symmetrieachse oder gar außerhalb des Körpers liegt.

3.4 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße einer Drillachse

Zur statischen Bestimmung der Winkelrichtgröße D einer Drillachse wird der folgende Versuchsaufbau verwendet:



Man lässt die Gewichtskraft $F_g = mg$ der Masse m über die Umlenkrolle an der Drehscheibe mit Radius r angreifen. Dadurch wirkt auf die Drillachse ein Drehmoment von $M_g = mgr$. Außerdem wirkt auf die Drillachse noch das Drehmoment, das von der Spiralfeder ausgeht und von deren Winkelrichtgröße D sowie der Auslenkung der Drillachse φ abhängt. Dieses Drehmoment errechnet sich zu $M_s = -D\varphi$. Im Gleichgewichtsfall bewegt sich die Drillachse nicht, es kann also insgesamt kein Moment wirken. Daraus erhalten wir, dass $M_g + M_s = 0$ gelten muss. Es ergibt sich damit also

$$mgr - D\varphi = 0$$

und somit

$$D = \frac{mgr}{\varphi}$$

Wir können diese Gleichung auch zu

$$\varphi = \frac{gr}{D} \cdot m$$

umformen, und erhalten somit eine Geradengleichung. Wenn man nun für verschiedene Massen m den jeweiligen Auslenkungswinkel φ über m aufträgt, so erhält man eine Gerade mit Steigung $\frac{gr}{D}$ und kann aus deren abgelesener Steigung die Winkelrichtgröße D bestimmen. Durch die Darstellung als Gerade sieht man sofort, dass der Drehwinkel φ der Drillachse proportional zu der Masse m des verwendeten Gewichts ist.

3.5 Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße einer Drillachse

Zur dynamischen Bestimmung der Winkelrichtgröße einer Drillachse werden verschiedene Körper mit jeweils bekanntem Trägheitsmoment J auf der Achse angebracht und in eine Drehschwingung versetzt. Für die Drehschwingung gilt nach Versuch 2 (Drehpendel)

$$\omega^2 = \frac{D}{J}$$

also mittels $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot J$$

Dies stellt wieder eine Geradengleichung dar, aus deren Steigung man die Winkelrichtgröße bestimmen kann. Die gemessene Schwingungsdauer T wird also quadriert über dem dazu gehörenden Trägheitsmoment J aufgetragen und die Steigung der daraus erhaltenen Geraden abgelesen, woraus sich dann D bestimmen lässt. Zwar müsste man noch berücksichtigen, dass $J = J_K + J_E$ gilt mit dem Trägheitsmoment des bekannten Körpers J_K und dem evtl. unbekanntem Eigenträgheitsmoment der Drillachse J_E , jedoch kann dieses Eigenträgheitsmoment unberücksichtigt bleiben, da dies unsere Gerade nur verschieben, jedoch zu der Steigung nichts beitragen würde.

3.6 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments einer Drillachse

Wird oben das unbekanntem Eigenträgheitsmoment doch berücksichtigt, so ändert sich die Geradengleichung zu

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot (J_K + J_E)$$

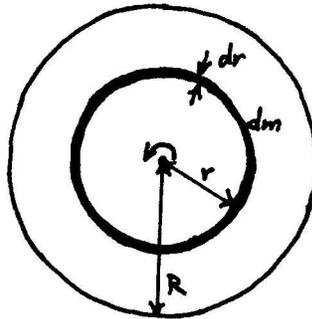
oder

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot J_K + \frac{4\pi^2}{D} J_E$$

und somit können wir nach Ablesen der Steigung und Bestimmung der Winkelrichtgröße D aus dem Achsenabschnitt $\frac{4\pi^2}{D} J_E$ auch das Eigenträgheitsmoment J_E der Drillachse bestimmen.

3.7 Berechnung von Trägheitsmomenten verschiedener Körper

3.7.1 Die flache Scheibe



Zur Berechnung des Trägheitsmoments J einer flachen Kreisscheibe mit Radius R bezüglich einer zur Scheibe senkrechten Drehachse durch ihren Mittelpunkt zerlegt man diese in ringförmige Massenelemente dm mit Radius r und Dicke dr . Jedes Massenelement hat also die Fläche $dA = 2\pi r dr$ und die Fläche der ganzen Scheibe beträgt $A = R^2\pi$. Somit hat jedes Massenelement die Masse

$$dm = \frac{m_{\text{ges}}}{A} dA = \frac{m_{\text{ges}}}{A} 2\pi r dr$$

Bei kontinuierlicher Massenverteilung ist das Trägheitsmoment allgemein

$$J = \int r^2 dm$$

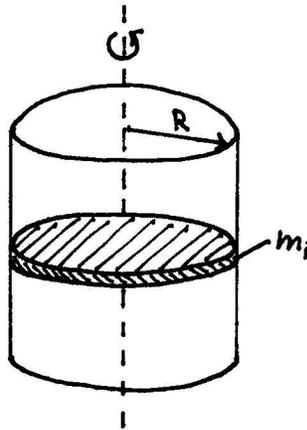
Ersetzt man dabei dm durch $\frac{m_{\text{ges}}}{A} 2\pi r dr$, so ergibt sich also

$$J = \int_0^R r^2 \frac{m_{\text{ges}}}{A} 2\pi r dr = \frac{2\pi m_{\text{ges}}}{R^2 \pi} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m_{\text{ges}}}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4}$$

also

$$J_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} R^2$$

3.7.2 Der Vollzylinder



Der Vollzylinder, der um seine Zylinderachse dreht, kann als Stapel aus lauter flachen Scheiben der Masse m_i betrachtet werden. Jede dieser Scheiben hat das oben berechnete Trägheitsmoment $J_i = \frac{1}{2} m_i R^2$. Das Gesamtträgheitsmoment des Zylinders ist

$$J = \sum_i \frac{1}{2} m_i R^2 = \frac{1}{2} R^2 \sum_i m_i$$

Da $\sum m_i = m_{\text{ges}}$ folgt daraus

$$J_{\text{Vollzylinder}} = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} R^2$$

3.7.3 Der Hohlzylinder

Für einen Hohlzylinder mit Innenradius r_i und Außenradius r_a , der ebenfalls um die Zylinderachse dreht, gehen wir folgendermaßen vor: In der Gleichung für das Trägheitsmoment allgemein $J = \int r^2 dm$ ersetzen wir dm durch ρdV , was bei homogener Massenverteilung nicht falsch ist. Durch Einführung von Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$dV = r d\varphi dr dz$$

Damit können wir nun das Integral berechnen:

$$J = \rho \int_0^l \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi dr dz = 2\pi l \rho \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = \frac{1}{2} \pi l \rho (r_a^4 - r_i^4)$$

Mit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l\pi(r_a^2 - r_i^2)}$ und $(r_a^4 - r_i^4) = (r_a^2 - r_i^2)(r_a^2 + r_i^2)$ ergibt sich daraus

$$J_{\text{Hohlzylinder}} = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} (r_a^2 + r_i^2)$$

3.7.4 Die Vollkugel

Die Vollkugel mit Radius R wird wie der Vollzylinder als Stapel von vielen flachen Scheiben angesehen. Betrachtet man nun eine solche Scheibe mit Abstand x zum Mittelpunkt, so gilt für ihren Radius

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Das Volumen dieser Scheibe ist dann

$$dV = \pi r^2 dx$$

Für eine homogene Massenverteilung gilt wieder

$$dm = \frac{m_{\text{ges}}}{V} dV = \frac{m_{\text{ges}}}{V} \pi r^2 dx = \frac{m_{\text{ges}}}{V} \pi (R^2 - x^2) dx$$

und das Trägheitsmoment der Scheibe ist

$$dJ = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \frac{m_{\text{ges}}}{V} \pi (R^2 - x^2) dx$$

Integriert man nun diese dJ von $-R$ bis R , so erhält man das Gesamtträgheitsmoment der Vollkugel:

$$J = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \frac{m_{\text{ges}}}{V} \pi (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{m_{\text{ges}}}{V} \pi \frac{8}{15} R^5$$

Mit $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ erhalten wir schließlich

$$J_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m_{\text{ges}} R^2$$

3.8 Der Satz von Steiner

Geht die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt eines Körpers, so ist das resultierende Trägheitsmoment höher als das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunkts. Dabei gilt

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,s}} + E_{\text{kin,rel}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2$$

Mit $v_S = \omega r$ folgt daraus

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (m r^2 + J_S) = \frac{1}{2} \omega^2 J_A$$

also

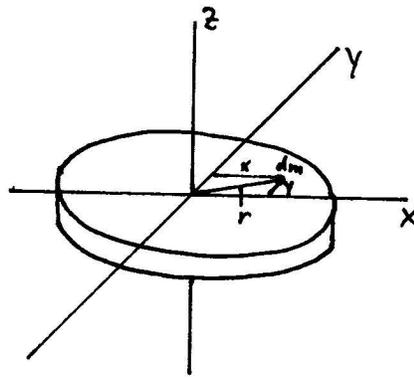
$$J_A = J_S + mr^2$$

mit dem Abstand r der Achse A vom Schwerpunkt S , dem Trägheitsmoment J_A bezüglich der Achse A und dem Trägheitsmoment J_S bezüglich des Schwerpunkts. Diese Beziehung wird „Satz von Steiner“ genannt.

3.9 Das Trägheitsmoment eines Zylinders bezüglich einer Drehachse, die senkrecht zur Zylinderachse steht

Betrachten wir nochmals die Scheibe von oben: Allgemein gilt

$$J = \int r^2 dm$$



Legen wir nun ein Achsenkreuz in die Scheibe, so dass die z -Achse senkrecht zur Scheibe in ihrem Mittelpunkt steht. Dadurch liegen die x -Achse und die y -Achse automatisch in der Scheibenebene, wobei sie aufgrund der Symmetrie gleichwertig sind. Nennen wir nun J_z das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse und analog dazu J_x und J_y , wobei, wie oben schon erwähnt, $J_x = J_y$ gilt. Da für jedes Massenelement mit Abstand r zur Drehachse $r^2 = x^2 + y^2$ gilt, erhalten wir

$$J_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = J_y + J_x$$

woraus mit $J_x = J_y$ sofort

$$J_z = 2J_x$$

folgt. Diese Beziehung gilt im Übrigen auch für einen Kreisring, was für den Hohlzylinder von Bedeutung ist.

Um nun das Trägheitsmoment eines Zylinders bezüglich einer senkrecht zur Zylinderachse stehenden Drehachse zu berechnen stellen wir uns den Zylinder wieder als aufreihung von vielen flachen Scheiben vor. Für jede dieser Scheibe gilt nach der oberen Überlegung und mit den Werten aus 1.4.1

$$J_x = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{4} mr^2$$

Die Scheiben haben das Volumen $dV = \pi r^2 dx$ und damit eine Masse von $dm = \rho \pi r^2 dx$. Wenn die Scheiben nun einen Abstand x von der Drehachse haben, dann gilt also mit dem Satz von Steiner

$$dJ = \frac{1}{4} dm r^2 + dm x^2 = \frac{1}{4} \rho \pi r^2 dx r^2 + \rho \pi r^2 dx x^2 = \rho \pi r^2 \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dx$$

Damit folgt für einen Zylinder der Länge l

$$J = \rho \pi r^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dx = \rho \pi r^2 \left(\frac{1}{4} r^2 l + \frac{1}{12} l^3 \right)$$

Es gilt $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 l}$, also

$$J = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

Ist nun die Drehachse noch um den Abstand d außerhalb des Schwerpunkts, so ergibt sich nach dem Satz von Steiner

$$J_{\text{Vollzylinder}} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2 + m d^2$$

Analog dazu nehmen wir für den Hohlzylinder die Scheibe aus dem Hohlzylinder in 1.4.3 und erhalten somit

$$J_x = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2) = \frac{1}{4} m (r_a^2 + r_i^2)$$

also analog zum Vollzylinder

$$J_{\text{Hohlzylinder}} = \frac{1}{4} m (r_a^2 + r_i^2) + \frac{1}{12} m l^2 + m d^2$$

4 Viskosität und Oberflächenspannung

4.1 Viskosität

Soll eine Platte der Fläche A gegenüber einer anderen Platte mit der Geschwindigkeit v verschoben werden, dann muss dazu bei einer Flüssigkeitsschicht der Dicke x zwischen den Platten eine Kraft aufgewendet werden, die Proportional zu der Fläche A und zur Geschwindigkeit v und umgekehrt proportional zur Schichtdicke x ist.

$$F \sim A \frac{v}{x}$$

Dass Fläche und Geschwindigkeit im Zähler stehen erscheint verständlich. Nicht auf Anhieb jedoch wird klar, dass die Schichtdicke im Nenner steht. Dies ergibt sich aber aus der Überlegung, dass bei einer größeren Schichtdicke die einzelnen Moleküllagen nicht so weit gegeneinander verschoben werden müssen, als bei einer geringen Schichtdicke, wo nur wenige Moleküllagen übereinander liegen. Führen wir als Proportionalitätsfaktor

also die Materialeigenschaft η ein, welche wir *dynamische Viskosität* nennen, so ergibt sich die Kraft zu

$$F = \eta A \frac{v}{x}$$

Die Viskosität ist aber nicht rein materialspezifisch, sondern hängt auch von der Temperatur ab. Mit steigender Temperatur nimmt die Viskosität von Flüssigkeiten ab, da infolge der zunehmenden thermischen Bewegung der Teilchen die zwischenmolekularen Abstände vergrößert werden und somit die distanzabhängigen Kohäsions- und Adhäsionskräfte abnehmen. Bei Gasen ist der Effekt umgekehrt, da hier die erhöhte Teilchenbewegung die Strömung stört.

Eine weitere Beschreibungsform der Viskositätseigenschaften ist die *kinematische Viskosität*

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

wobei hier einfach die dynamische Viskosität eines Stoffes auf seine spezifische Dichte bezogen wird.

4.2 Strömungsarten und Reynoldszahl

Das Modell oben gilt nur für *laminare Strömungen*, die sich dadurch auszeichnen, dass sich keine Flüssigkeitsschichten vermischen. Diese Art von Strömungen liegt nur bei langsamen Bewegungen vor. Bei schnelleren Bewegungen kommt es zu Turbulenzen in den Flüssigkeitsschichten und es entsteht eine *turbulente Strömung*, wobei sich innerhalb des Flusses geschlossene Strömungslinien (Wirbel) bilden. Ein Kriterium zur Beurteilung, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist, ist die *Reynoldszahl*

$$R = \frac{Lv}{\nu} = \frac{L\rho v}{\eta}$$

mit der charakteristischen Größe L , die vom Versuchsaufbau abhängt. Oberhalb der *kritischen Reynoldszahl* geht eine laminare in eine turbulente Strömung über.

4.3 Das Stokessche Gesetz

Für laminare Strömungen gilt: Eine Kugel mit Radius r , die von einer Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v umströmt wird, erfährt die gleiche Kraft F , die nötig wäre, um die Kugel mit der selben Geschwindigkeit durch die ruhende Flüssigkeit zu bewegen. Dabei gilt für diese Reibungskraft nach dem *Gesetz von Stokes*

$$F_R = 6\pi\eta vr$$

Auf eine Herleitung wird hier verzichtet, da diese sehr schwierig und zeitaufwendig ist. Dieses Gesetz gilt aber so nur für sehr kleine Geschwindigkeiten in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit. Für endliche Dimensionen wird der *Ladenburgsche Korrekturfaktor*

$$\lambda = \lambda_R \lambda_H = \left(1 + 2,1 \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot \left(1 + 3,3 \cdot \frac{r}{H}\right)$$

verwendet. Dieser Faktor ergibt sich für eine Kugel mit Radius r in einer Säule mit Radius R und Höhe H . Er gilt für $r \ll R$ und $r \ll H$. Das veränderte Gesetz von Stokes lautet nun

$$F_R = 6\pi\eta vr\lambda$$

Da bei praktischen Messungen unter den Bedingungen $r \ll R$ und $r \ll H$ der Korrekturfaktor kleiner ist, als der zu erwartende Fehler, wird auf eine weitere Verwendung hier verzichtet.

Damit kann nun nach der *Stokesschen Methode zur Bestimmung der Viskosität* sehr einfach die Viskosität einer bestimmten Flüssigkeit bestimmt werden. Befindet sich eine Kugel mit Radius r , Volumen V und Dichte ρ_K im Freien Fall in einer Flüssigkeit mit dynamischer Viskosität η und Dichte ρ_F nahe der Erdoberfläche, so wirken auf sie folgende Kräfte:

- Reibungskraft

$$F_R = 6\pi\eta vr$$

- Gewichtskraft

$$F_G = mg = \rho_K Vg$$

- Auftriebskraft

$$F_A = \rho_F Vg$$

Nach einer Zeit stellt sich ein Gleichgewicht der Kräfte ein, und die Kugel wird nicht weiter beschleunigt. Es gilt dann

$$|\vec{F}_G| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_R|$$

also

$$\rho_K Vg = \rho_F Vg + 6\pi\eta vr$$

und somit

$$\eta = \frac{Vg(\rho_K - \rho_F)}{6\pi vr} = \frac{2r^2g(\rho_K - \rho_F)}{9v}$$

4.4 Oberflächenspannung

Innerhalb einer Flüssigkeit wirken zwischenmolekulare Bindungskräfte (Kohäsionskräfte), die sogenannten *Van-der-Waals-Kräfte*. Diese sind auf eine Reichweite von etwa 10^{-9}m beschränkt, wirken aber innerhalb dieser Entfernungen wesentlich stärker als die Gravitationskraft der Erde, wodurch sich die Wassertropfenbildung erklären lässt. Da bei Gasen die Moleküldichte sehr klein und daher die Molekülabstände sehr groß sind, scheint es verständlich, dass man dort solche Effekte nicht beobachten kann.

Betrachten wir nun eine Flüssigkeit: Auf ein Molekül tief in der Flüssigkeit wirken von allen Raumrichtungen gleiche Kohäsionskräfte, so dass sie sich gegenseitig aufheben. Befindet sich ein Molekül aber in der Nähe der Oberfläche, so werden die Kräfte nach oben geringer, und es ergibt sich eine resultierende Kraft, die ins Innere der Flüssigkeit

gerichtet ist. Wird nun ein Molekül vom Flüssigkeitsinneren an die Oberfläche gebracht, so muss entgegen dieser Kraft Arbeit verrichtet werden. Gleichzeitig verändert sich die Oberfläche der Flüssigkeit. Daher können wir den Molekülen, die sich an der Oberfläche befinden, eine potentielle Energie, die *Oberflächenenergie*, zuordnen. Werde also die Energie ∂W benötigt, um ein Molekül an die Oberfläche zu bringen; die daraus resultierende Oberflächenänderung sei ∂A . Damit definieren wir nun die *Oberflächenspannung*

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial A}$$

Da jedes Teilchen versucht, den Zustand der geringsten Energie einzunehmen, ergibt sich, dass z.B. eine Flüssigkeit die Form mit der möglichst kleinen Oberfläche einzunehmen versucht. Daher ist ein Wassertropfen rund.

4.4.1 Typische Oberflächenspannungen

Einige typische Oberflächenspannungen sind z.B. bei $T = 18^\circ\text{C}$ für

- Quecksilber: $\sigma = 0,471\text{N/m}$
- Wasser: $\sigma = 0,0729\text{N/m}$
- Äthylalkohol: $\sigma = 0,017\text{N/m}$

(Quelle: Gerthsen/Vogel: Physik)

4.4.2 Verhalten bei Verunreinigungen

Verunreinigungen haben starke Auswirkungen auf die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit, da sie sich häufig an der Oberfläche sammeln. Inwiefern sich die Oberflächenspannung durch Fremdmoleküle verändert hängt davon ab, wie stark die Wechselwirkungen zwischen den Flüssigkeits- und den Fremdmolekülen sind. Wenn diese größer sind, als die Wechselwirkungen der Flüssigkeitsmoleküle untereinander, so steigt die Oberflächenspannung (Bsp: Salz in Wasser), sind sie kleiner, so nimmt die Oberflächenspannung ab (Bsp: Seife oder ähnliches in Wasser).

4.4.3 Verhalten bei Temperaturänderung

Mit zunehmender Temperatur wird die thermische Eigenbewegung der Teilchen stärker und sie nehmen einen größeren Raum für sich ein (Dichte sinkt). Dadurch werden die Molekülabstände größer, und deshalb die Kohäsionskräfte kleiner. Die Oberflächenspannung nimmt also mit steigender Temperatur ab.

4.5 Experimentelle Bestimmung von Oberflächenspannungen

4.5.1 Die Abreißmethode

Ein Metallring mit dem Durchmesser d wird in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht und langsam wieder herausgezogen, wobei sich eine Flüssigkeitshaut zwischen dem Ring

und der Flüssigkeitsoberfläche bildet. Nun wird die Zugkraft F_Z gemessen, bei der die Haut abreißt. Diese Zugkraft setzt sich aus der Gewichtskraft des Rings F_G und der Abreißkraft $F_A = F_Z - F_G$ zusammen. Aus der Abreißkraft lässt sich die Oberflächenspannung σ mit der oben eingeführten Formel berechnen. Für die Arbeit ∂W gilt

$$\partial W = F_A \partial s$$

und für die Flächenänderung ∂A , welche die Form eines Zylindermantels hat,

$$\partial A = 2 \cdot 2\pi r \partial s$$

wenn ∂s die Höhe der Ringkante über der Flüssigkeitsoberfläche ist. Der Faktor 2 kommt bei der Flächenänderung von der Tatsache, dass der Flüssigkeitsfilm zwei Oberflächen hat (innen und außen). Damit erhalten wir also

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial A} = \frac{F_A \partial s}{4\pi r \partial s} = \frac{F}{4\pi r} = \frac{F}{2\pi d}$$

4.5.2 Die Blasendruckmethode

Hierbei wird zur Bestimmung der Oberflächenspannung eine Kapillare senkrecht in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht. Die Eintauchtiefe sei h und der Radius der Kapillare r . Im Inneren der Kapillare wird ein Überdruck erzeugt, wodurch sich an ihrem unteren Ende eine Luftblase bildet. Der Druck wird so lange erhöht, bis die Blase platzt, wodurch der Druck rasch wieder abfällt. Der maximale Druck p ist für die Bestimmung der Oberflächenspannung von Bedeutung. Er setzt sich zusammen aus dem hydrostatischen Druck $p_{\text{hyd}} = \rho g h$ und dem Druck, der aus der Oberflächenspannung resultiert $p_\sigma = \frac{2\sigma}{r}$ (s. unten). Dabei wird angenommen, dass die Luftblase kugelförmig ist und den selben Durchmesser wie die Kapillare besitzt. Es gilt damit

$$p = p_{\text{hyd}} + p_\sigma = \frac{2\sigma}{r}$$

Für den Druck gilt also abhängig von der Eintauchtiefe h

$$p(h) = \rho g h + \frac{2\sigma}{r}$$

Hierbei handelt es sich um eine Geradengleichung mit dem Achsenabschnitt $\frac{2\sigma}{r}$ und der Steigung ρg . Wir können also aus dem Diagramm sowohl die Dichte der Flüssigkeit, wie auch ihre Oberflächenspannung ablesen.

4.6 Überdruck in einer Gasblase (z.B. Seifenblase)

Bei einer Gasblase in einer Flüssigkeit gilt wie bei einem Flüssigkeitstropfen im Gas für

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial A} \quad \partial A = 4\pi(r + \partial r)^2 - 4\pi r^2 = 4\pi(r\partial r + \partial r^2) \approx 8\pi r \partial r$$

und

$$\partial W = F \partial r = p A \partial r = 4\pi p r^2 \partial r$$

also

$$\sigma = \frac{pr}{2}$$

und somit

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

Damit gilt für eine Seifenblase, da diese zwei etwa gleich große Oberflächen besitzt (innen und außen)

$$p = \frac{4\sigma}{r}$$

5 Schallgeschwindigkeit und Adiabatenexponent

5.1 Schallwellen in unterschiedlichen Materialien

Als Schallwellen bezeichnet man im Allgemeinen die Ausbreitung von Druckschwankungen in elastischen Medien. Die dabei auftretenden Wellen lassen sich in zwei unterschiedliche Arten einteilen:

- Longitudinalwellen (Längswellen):
Die Oszillatoren schwingen in Richtung des Ausbreitungsvektors.
- Transversalwellen (Querwellen):
Die Oszillatoren schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Während in Festkörpern beide Arten der Schallwellen vorkommen, treten in flüssigkeiten nur Longitudinalwellen auf. Longitudinale Schallwellen breiten sich in einem Körper als Verdünnungs- und Verdichtungsfronten aus. Die Geschwindigkeit, mit der sich diese Fronten fortbewegen wird Schallgeschwindigkeit genannt. Diese ist abhängig vom Material, in dem sich der Schall ausbreitet. Je nach Medium (fest, flüssig, gasförmig) gehen andere Materialeigenschaften in die Berechnung der Schallgeschwindigkeit ein. Auf jeden Fall gilt aber für die Beziehung zwischen der Frequenz f der Schwingung, ihrer Wellenlänge λ und der Schallgeschwindigkeit c

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

5.1.1 Schallgeschwindigkeit im Festkörper

Die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern hängt folgendermaßen vom Elastizitätsmodul E und der Dichte ρ des Materials ab:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Mit der Dichte ist die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern temperaturabhängig und beträgt typischerweise etwa 1200 - 6000m/s.

5.1.2 Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

Bei Flüssigkeiten hängt die Schallgeschwindigkeit vom Kompressionsmodul K und von der Dichte ρ folgendermaßen ab:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Auch hier erkennt man die selbe Temperaturabhängigkeit. Typische Schallgeschwindigkeiten in Flüssigkeiten sind etwa 1100 - 2000m/s.

5.1.3 Schallgeschwindigkeit in Gasen

In Gasen hängt die Schallgeschwindigkeit vom Adiabatenexponenten κ , dem Druck p und der Dichte ρ ab. Dabei gilt

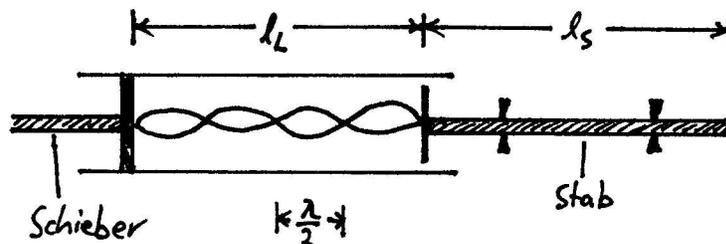
$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

oder mit $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

wobei R die allgemeine Gaskonstante, T der Druck und M die molare Masse des Gases ist. Der Adiabatenexponent beschreibt lediglich das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$. Aus ihm geht hervor, dass die Verdichtungen und Verdünnungen in der Schallwelle adiabatische Vorgänge sind. Da das Verhältnis $\frac{p}{\rho}$ proportional zur Temperatur T ist, ergibt sich hier eine noch stärkere Temperaturabhängigkeit. Typischerweise liegt die Schallgeschwindigkeit bei Gasen im Bereich 200 - 1300m/s.

5.2 Die Kundtsche Röhre



Um die Schallgeschwindigkeit in einem bestimmten Material zu bestimmen, kann man die Kundtsche Röhre verwenden. Ein Stab aus dem zu bestimmenden Material wird bei $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ seiner Länge eingespannt. Reibt man den Stab nun mit einem mit Alkohol angefeuchteten Lappen, so wird er in Longitudinal-Schwingungen versetzt. Da die eingeklemmten Stellen nicht schwingen können ergibt sich hier zwingend ein Schwingungsknoten, folglich ist die gesamte Stablänge l_S gerade gleich der Wellenlänge im Stab λ_S . An einem Ende des Stabes ist eine lange Glasröhre. Die Luft in dieser Röhre wird durch eine am Stab angebrachte Platte zu Schwingungen angeregt. Dabei ergeben sich

bei geeigneter Länge der Glasröhre stehende Wellen, nämlich genau dann, wenn eine Eigenfrequenz der Luftsäule gerade der Schwingungsfrequenz des Stabes entspricht, also $f_L = f_S$. In diesem Fall gilt also

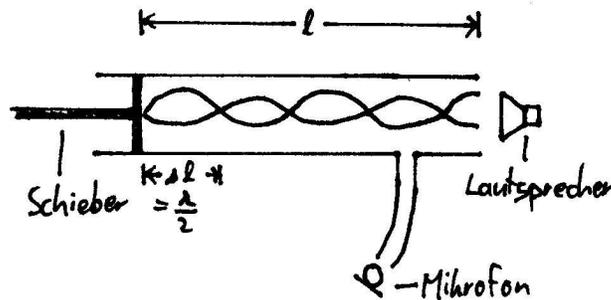
$$\frac{c_S}{\lambda_S} = \frac{c_L}{\lambda_L}$$

Um die Luftschwingungen sichtbar zu machen wird in der Röhre feines Korkpulver verteilt. Bilden sich nun stehende Wellen aus, so ist die Luft an den Schwingungsknoten in Ruhe, und das Korkpulver bleibt unbewegt liegen. Zu den Schwingungsbäuchen hin, wird das Korkpulver immer mehr in Schwingungen versetzt, so dass sich ein regelmäßiges Muster bildet, in dem die stehenden Wellen sehr gut zu sehen sind. Eine stehende Welle bildet sich dann scharf aus, wenn die Länge der Luftsäule gerade $l_L \approx \frac{n\lambda_L}{2}$ ist, was durch verstellen des Schiebers am anderen Ende der Glasröhre zu erreichen ist. Um nun die Wellenlänge λ_L zu bestimmen, misst man den Abstand zwischen zwei Schwingungsknoten, was gerade der halben Wellenlänge entspricht. Durch umformen der oberen Gleichung erhalten wir direkt die gesuchte Schallgeschwindigkeit

$$c_S = \frac{\lambda_S}{\lambda_L} c_L$$

wobei für die Schallgeschwindigkeit λ_L in Luft die Vakuumschallgeschwindigkeit $c \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ als ziemlich exakte Näherung angenommen wird.

5.3 Das Quinckesche Resonanzrohr



Das Quinckesche Resonanzrohr ist eine einseitig geschlossene, einseitig offene Röhre. An dem offenen Ende ist in einem Abstand ein Schallgeber in Form eines Lautsprechers angebracht. für eine einseitig offene Röhre gilt im Resonanzfall für die Ausbildung von stehenden Wellen, dass am geschlossenen Ende gerade ein Schwingungsknoten ist, während am offenen Ende ein Schwingungsbauch liegt. Es gilt also im Resonanzfall für die Länge l der Glasröhre

$$l = n \frac{\lambda_L}{2} + \frac{\lambda_L}{4} = \frac{2n+1}{4} \lambda_L$$

Auf einem Rohransatz nahe des offenen Endes ist ein Hörschlauch angebracht, durch den man den Resonanzfall ermitteln kann, da im Resonanzfall ein Maximum der Lautstärke auftritt. Zur Objektivierung dieser Messung wird das Maximum nicht mit dem Ohr,

sondern mittels eines Mikrofons und daran angeschlossenem Strommesser ermittelt. Nun wird also der Schieber, welcher die Röhre am anderen Ende abschließt, solange verschoben bis ein Maximum erreicht ist. Kommt man darüber hinaus, so wird die Lautstärke wieder kleiner durchschreitet ein sehr unscharfes Minimum und wächst danach wieder zu einem Maximum an. Der Abstand, um den man den Schieber zwischen zwei Maxima verschiebt, entspricht nun gerade $\frac{\lambda}{2}$. Zur Minimierung der Messunsicherheit werden mehrere Abstände zwischen verschiedenen Maxima gemessen und die Werte anschließend gemittelt.

Aus dem gewonnenen Wert für die Wellenlänge λ lässt sich nun bei bekannter Erregerfrequenz die Schallgeschwindigkeit

$$c = f\lambda$$

für das in der Röhre befindliche Gas bestimmen. Aufgrund der oben beschriebenen Beziehung $c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$ lässt sich mit Hilfe des Quinckeschen Resonanzrohres auch der Adiabatenexponent κ des verwendeten Gases bestimmen.

5.4 Zustandsänderungen

Gase ändern ihren Zustand bei physikalischen Vorgängen auf sehr unterschiedliche Arten, je nach dem, wie auf das Gas eingewirkt wird.

5.4.1 Isochore Zustandsänderung

Bleibt das Volumen des Gases konstant, während der Druck aufgrund einer Zuführung von Energie in Form von Wärme ansteigt, so spricht man von einer isochoren Zustandsänderung, wobei keine mechanische Arbeit verrichtet wird. Nach dem zweiten Gay-Lussac-Gesetz gilt hierbei

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Bei isochoren Zustandsänderungen findet ein Wärmeaustausch statt und es gilt

$$\Delta Q = c_V m \Delta T$$

5.4.2 Isobare Zustandsänderung

Analog dazu spricht man bei konstantem Druck, aber verändertem Volumen von isobaren Zustandsänderungen. Hier wird direkt mechanische Arbeit verrichtet, wobei für die vom System abgegebene Arbeit gilt

$$\Delta W = p \Delta V$$

Nach dem ersten Gay-Lussac-Gesetz gilt für isobare Zustandsänderungen

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

und für die zugeführte Wärme

$$\Delta Q = c_p m \Delta T$$

5.4.3 Isotherme Zustandsänderungen

Wird das System in einen Puffer mit großer Wärmekapazität gegeben und Vorgänge laufen langsam ab, so dass die Möglichkeit gegeben ist, die Temperatur des Systems konstant zu halten, so sprechen wir aufgrund der konstanten Temperatur von isothermen Zustandsänderungen. Hier ist das Produkt $p \cdot V$ aus Druck und Volumen konstant. Hier verrichtet die gesamte zugeführte Wärme mechanische Arbeit und die innere Energie des Systems verändert sich nicht. Für die Volumenänderungsarbeit gilt

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} nRT \frac{1}{V} dV = nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Im p - V -Diagramm beschreibt eine Isotherme eine Hyperbel, wobei die Fläche unter der Hyperbel gerade der Volumenänderungsarbeit entspricht.

5.4.4 Adiabatische Zustandsänderungen

Adiabatische Zustandsänderungen verlaufen so schnell, dass dabei gar kein Wärmeaustausch stattfinden kann. Es gilt dann also $\Delta Q = 0$. Im p - V -Diagramm beschreibt die Adiabate gerade eine Übergangslinie zwischen zwei Isothermen. Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$dU = dQ + dW$$

ergibt sich mit $dQ = 0$ also $dU = dW$. Mit der Änderung der inneren Energie

$$dU = c_V m \cdot dT$$

und der Volumenänderungsarbeit

$$dW = -p \cdot dV$$

gilt also

$$c_V m \cdot dT = -p \cdot dV$$

Aus der allgemeinen Gasgleichung ergibt sich für den Druck $p = \frac{mRT}{V}$. Oben eingesetzt erhalten wir also

$$c_V m \cdot dT = -mRT \frac{1}{V} \cdot dV$$

Außerdem gilt $R = c_p - c_V$, also

$$c_V \cdot dT = -(c_p - c_V) T \frac{1}{V} \cdot dV$$

Nun wird integriert

$$c_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT = -(c_p - c_V) \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV$$

und es ergibt sich schließlich

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{c_p - c_V}{c_V}}$$

Wird nun der Adiabatenexponent κ als das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten definiert, also

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

so ergeben sich die *Poissonschen Gleichungen*:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1}$$

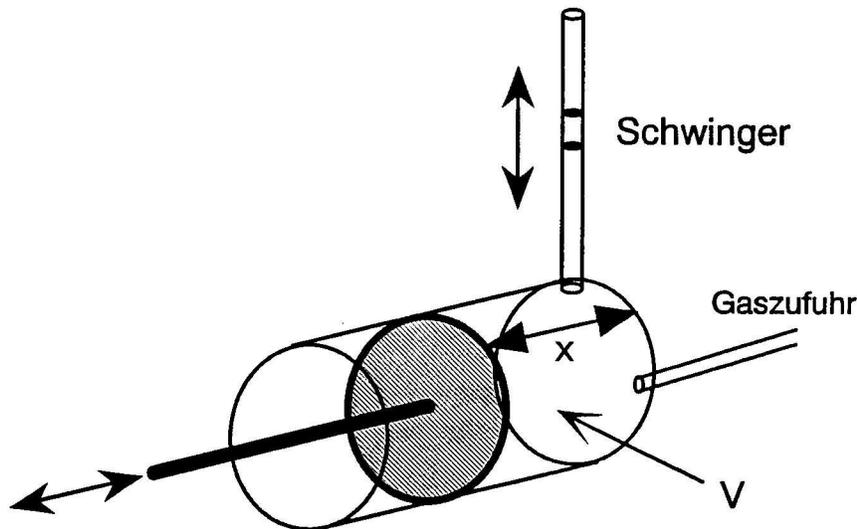
$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Durch gleichsetzen erhalten wir

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa}$$

Daraus ersieht man, dass bei adiabatischen Vorgängen immer gilt: $p \cdot V^{\kappa} = \text{const.}$

5.5 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Rüchardt



Die Bestimmung des Adiabatenexponenten κ nach Rüchardt geschieht mittels eines liegenden Hohlzylinders, bei dem über einen Schieber das Volumen variiert werden kann. Dieser Hohlzylinder ist mit dem Gas gefüllt, dessen Adiabatenexponent bestimmt werden soll. Senkrecht in den Zylinder ist ein Glasrohr eingelassen, in dem sich ein Schwinger befindet, der die Anordnung mehr oder weniger gut abdichtet. Dieser Schwinger kann oszillieren, wobei das Gasvolumen sehr schnell und ohne, dass Wärme abgegeben oder aufgenommen wird, also adiabatisch expandiert und komprimiert wird. Misst man die Dauer für eine bestimmte Anzahl von Schwingungen, so kann man damit dann den Adiabatenexponenten des Gases bestimmen. Die dazu benötigte Formel soll im Folgenden hergeleitet werden. Wichtig hierbei ist, dass das Gasvolumen konstant gehalten wird.

Grundlage für die Bestimmung ist das Gesetz von Poisson für adiabatische Zustandsänderungen (s. oben). Bewegt sich nun der Schwinger, so ändert sich der Druck, sowie das Volumen des Gases und es gilt

$$p_0 V_0^\kappa = (p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V)^\kappa$$

Über eine Taylor-Näherung erhalten wir

$$\Delta p = \kappa p_0 \frac{\Delta V}{V_0}$$

Die dabei auf den Schwinger ausgeübte Rückstellkraft ist

$$F = \Delta p A$$

mit der Grundfläche A des Oszillators. Da sich der Schwinger wie ein Federpendel verhält, führen wir analog zur Pendelschwingung des Federpendels eine Richtgröße ein:

$$D = \frac{F}{\Delta y}$$

Ebenfalls analog zum Federpendel beziehen wir die Schwingungsdauer T auf die Masse m und die Richtgröße D des Schwingers:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{m V_0}{\kappa p_0 A^2}}$$

Der Druck p_0 setzt sich zusammen aus dem Luftdruck und dem Schweredruck des Schwingers:

$$p_0 = p_{\text{Luft}} + \frac{mg}{A}$$

Das Volumen V_0 ergibt sich aus der Stellung des Schiebers x zu

$$V_0 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 x$$

wenn D der Durchmesser des Zylinders ist. Für die Fläche A gilt

$$A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Werden diese Beziehungen oben eingesetzt und nach κ aufgelöst, so erhalten wir

$$\kappa = \left(\frac{2\pi}{AT}\right)^2 \frac{m}{p_0} V_0 = 16 \frac{m D^2 \pi x}{d^4 T^2 \left(p_{\text{Luft}} + \frac{mg}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)}$$

5.6 Zusammenhang zwischen dem Adiabatenexponenten und den Freiheitsgraden eines idealen Gases

5.6.1 Gleichverteilungssatz

Nach dem Gleichverteilungssatz entfällt auf jeden Freiheitsgrad eines idealen Gases, welches sich in einem System im Gleichgewicht befindet, die mittlere Energie $\frac{1}{2}kT$ pro Teilchen oder $\frac{1}{2}RT$ pro Mol.

5.6.2 Der Adiabatenexponent abhängig von der Zahl der Freiheitsgrade

Für die innere Energie einer bestimmten Gasmenge m gilt

$$U = \frac{f}{2}mRT$$

Ebenso gilt

$$U = c_V mT$$

Durch gleichsetzen und Umformen erhalten wir einen Ausdruck für die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen

$$c_V = \frac{f}{2}R$$

Mit $c_p = c_V + R$ ergibt sich daraus für die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck

$$c_p = \frac{f+2}{2}R$$

Für den Adiabatenexponenten κ gilt also

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f}$$

6 Spezifische Wärmekapazität

6.1 Was ist Wärme?

Wird Wärme als Energie betrachtet, so ist es zuerst erforderlich, den mikroskopischen Aufbau von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen zu kennen. Allgemein steckt Wärme immer in der Bewegung der Moleküle eines Stoffes.

Bei Festkörpern sind diese zwar in einem festen Gitter angeordnet und somit ortsfest, dies bedeutet aber nicht, dass sie sich überhaupt nicht bewegen. Tatsächlich schwingen sie um ihre Ruhelage mit unterschiedlicher Amplitude. Je größer die Amplitude dieser Schwingung, desto höher die innere Energie (Wärme) des betrachteten Stoffes.

Bei Gasen und bei Flüssigkeiten kommt zur Schwingung der Moleküle in alle drei Raumrichtungen noch zusätzlich kinetische Energie, die aus der Rotation und der Translation der Moleküle hervorgeht, da hier die Moleküle nicht ortsfest angeordnet sind. Auch hier gilt wieder: Je größer die Bewegung, desto wärmer die Flüssigkeit oder das Gas.

6.2 Die Wärmekapazität

Die Wärmekapazität ist die Fähigkeit eines Stoffes, die oben beschriebene Energieform (Wärme) zu speichern. Je größer die Wärmekapazität, desto mehr nimmt die innere Energie (Wärme) des Stoffes zu, wenn er um eine bestimmte Temperaturdifferenz ΔT erwärmt wird. Mit anderen Worten, je mehr Wärme ein Stoff aufnehmen kann, desto kleiner ist der Temperaturanstieg bei einer bestimmten zugeführten Wärmemenge ΔQ . Die Wärmekapazität lässt sich damit zu

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

definieren. Dies ist eine von Menge und Art des Stoffes abhängige Größe. Wird die Wärmekapazität auf die Masse bezogen, so erhalten wir die (Stoff-) *spezifische Wärmekapazität*

$$c = \frac{C}{m}$$

Wird sie dagegen auf die Stoffmenge ν in Mol bezogen, so ergibt sich die *molare Wärmekapazität*

$$c_m = \frac{C}{\nu}$$

Bei Gasen ist die spezifische Wärmekapazität von Temperatur und Druck abhängig. Man unterscheidet hier zwischen c_V für Vorgänge, bei denen das Volumen des Gases konstant bleibt (isochore Vorgänge) und c_p für konstanten Druck (isobare Vorgänge).

6.3 Bestimmung der Wärmekapazität eines Kalorimetergefäßes

Um mit einem Kalorimeter Messungen zur Wärmekapazität eines bestimmten Stoffes durchzuführen, sollte die eigene Wärmekapazität des Kalorimetergefäßes bekannt sein, da sie sonst das Ergebnis verfälscht, wenn sie außer Acht gelassen wird. Zur ihrer Bestimmung kann man folgendermaßen vorgehen:

Zunächst wird eine Flüssigkeit mit bekannter spezifischer Wärmekapazität (z.B. Wasser, $c_W = 4,182 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$)³ und bekannter Masse m_1 in das Kalorimetergefäß gegeben. Nachdem sich die Temperatur des Gefäßes und der Flüssigkeit angepasst haben, wird ihre gemeinsame Temperatur T_1 ermittelt.

Dazu wird wiederum eine bestimmte Masse m_2 der selben Flüssigkeit, aber mit deutlich höherer Temperatur T_2 gegeben. Nach kurzer Zeit stellt sich dann in der gesamten Flüssigkeit eine Mischungstemperatur T_m ein, welche ebenfalls ermittelt wird.

Da die gesamte Wärme des Systems sich nicht verändert hat (Energieerhaltungssatz) gilt nun:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

mit $\Delta Q_1 = C_{\text{Kal}} \Delta T_1 + c_W m_1 \Delta T_1 = (C_{\text{Kal}} + c_W m_1)(T_m - T_1)$
und $\Delta Q_2 = c_W m_2 \Delta T_2 = c_W m_2 (T_2 - T_m)$

³Walcher, Tab. A 1.7

also

$$C_{\text{Kal}} = c_W m_2 \frac{T_2 - T_m}{T_m - T_1} - c_W m_1$$

6.4 Bestimmung von spezifischen Wärmekapazitäten durch Mischungskalorimetrie

Will man die spezifische Wärmekapazität c z.B. eines Festkörpers bestimmen, so kann man dies nach der Methode der Mischungskalorimetrie machen. Dazu wird ein Kalorimetergefäß mit bekannter Wärmekapazität C_{Kal} mit Wasser bestimmter Masse m_W gefüllt und die Temperatur T_1 dieser Anordnung bestimmt. Anschließend wird eine Probe bestimmter Masse m des zu bestimmenden Stoffes auf eine bestimmte Temperatur T_2 gebracht und schließlich in das Wasser gegeben. Nach Einstellung der Mischungstemperatur T_m wird diese bestimmt und es gilt

$$cm\Delta T_2 = (c_W m_W + C_{\text{Kal}})\Delta T_1$$

mit $\Delta T_2 = T_2 - T_m$ und $\Delta T_1 = T_m - T_1$, also

$$c = \frac{(c_W m_W + C_{\text{Kal}})\Delta T_1}{m\Delta T_2}$$

Ist die Wärmekapazität C_{Kal} nicht bekannt, so müssen zwei Messungen mit leicht veränderten Bedingungen (z.B. verschiedene Mengen Wasser $m_{W,1}$ und $m_{W,2}$) und es gelten dann die Gleichungen

$$cm \frac{\Delta T_{2,1}}{\Delta T_{1,1}} = c_W m_{W,1} + C_{\text{Kal}}$$
$$cm \frac{\Delta T_{2,2}}{\Delta T_{1,2}} = c_W m_{W,2} + C_{\text{Kal}}$$

Durch Subtrahieren erhalten wir

$$cm \left(\frac{\Delta T_{2,1}}{\Delta T_{1,1}} - \frac{\Delta T_{2,2}}{\Delta T_{1,2}} \right) = c_W (m_{W,1} - m_{W,2})$$

also

$$c = \frac{c_W (m_{W,1} - m_{W,2})}{m \left(\frac{\Delta T_{2,1}}{\Delta T_{1,1}} - \frac{\Delta T_{2,2}}{\Delta T_{1,2}} \right)}$$

6.5 Das Thermoelement

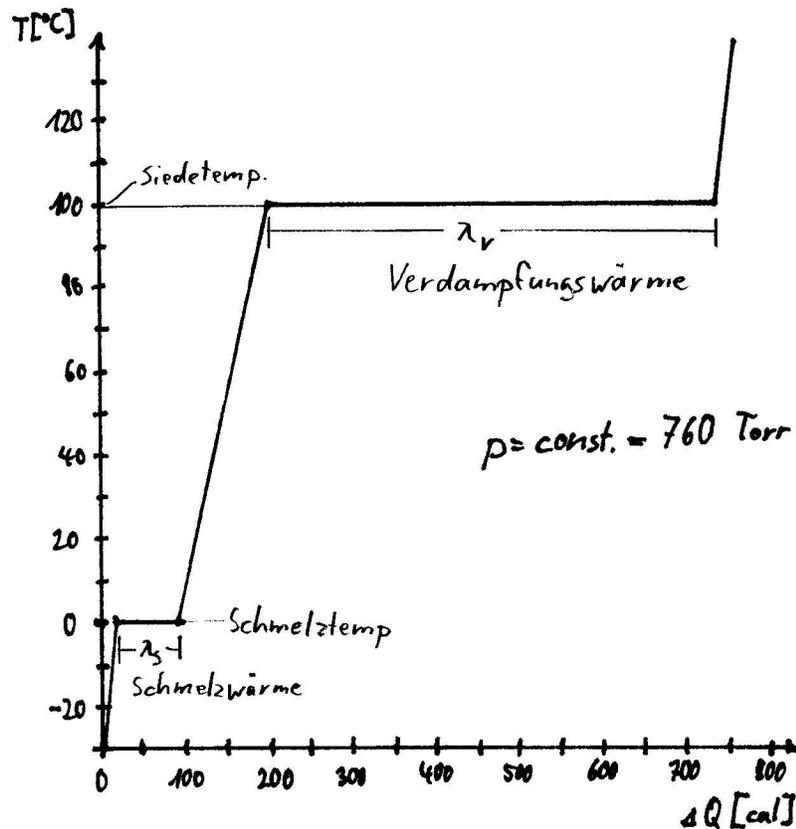
Beim Thermoelement wird der Effekt ausgenutzt, dass sich an den Berührungstellen zweier unterschiedlicher Metalle sogenannte Kontaktspannungen bilden, welche von der Temperatur abhängig sind. Hält man eine Kontaktstelle auf konstanter Temperatur (Referenztemperatur), so ist die gemessene Differenz der Kontaktspannungen, welche als Thermospannung bezeichnet wird, ein Maß für den Temperaturunterschied zur anderen Kontaktstelle.

7 Latente Wärmen

7.1 Latente Wärme

Betrachten wir Eis unter Zufuhr von Wärme, so stellen wir fest, dass die Temperatur stetig ansteigt bis sie bei 0°C angekommen ist. Dann bleibt die Temperatur für eine Zeit lang konstant, obwohl weiterhin Wärme zugeführt wird. In dieser Zeit schmilzt das Eis, es findet also ein Phasenübergang von dem festen in den flüssigen Aggregatzustand statt. Da die hier zugeführte Wärme keine Temperaturerhöhung bewirkt, sondern nur zum Schmelzen des Eises verwendet wird, sprechen wir von der Schmelzwärme. Analog verhält es sich bei der Verdampfungswärme im Bereich von ca. 100°C . Dieser Effekt rührt daher, dass bei Festkörpern die Moleküle sehr dicht gepackt sind, während sie in Flüssigkeiten schon weiter verteilt sind und in Gasen sich im ganzen Raum verteilen. Wird also ein Festkörper verflüssigt (durch Schmelzen), so müssen die Moleküle entgegen ihrer zwischenmolekularen Anziehungskräfte weiter voneinander getrennt werden. Dadurch erhöht sich ihre potentielle, nicht aber ihre kinetische Energie, weshalb die Temperatur gleich bleibt.

Wie oben schon beschrieben verhält sich die Temperatur von Eis bzw. Wasser unter Zufuhr von einer konstanten Wärmemenge pro Zeiteinheit folgendermaßen:



Aus diesem Diagramm kann man sehr gut die aufgebrauchte Schmelzwärme λ_S bzw. die

Verdampfungswärme λ_V ablesen. Diese sind vom Umgebungsdruck, dem verwendeten Stoff, sowie von der Stoffmenge und damit von der Masse des Stoffes abhängig. Werden sie auf die Masse des Stoffes bezogen, so erhalten wir die *spezifische Schmelzwärme*

$$q_S = \frac{\lambda_S}{m}$$

bzw. die *spezifische Verdampfungswärme*

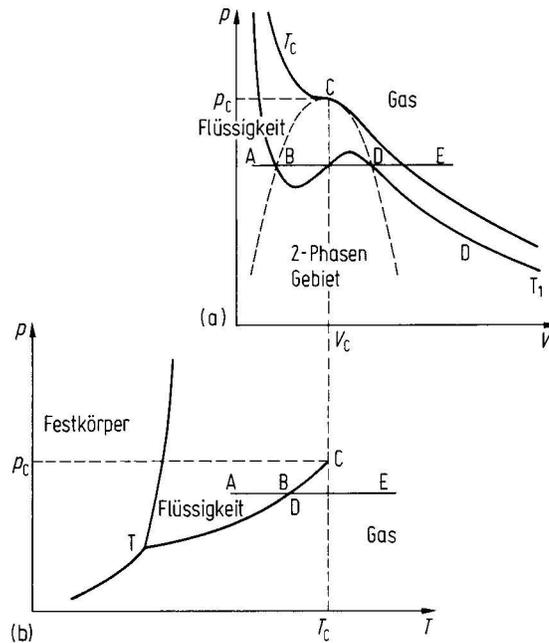
$$q_V = \frac{\lambda_V}{m}$$

Typische Werte für Wasser sind dabei $q_S = 333,7 \text{ kJ/kg}$ und $q_V = 2256 \text{ kJ/kg}$ (Walcher, Tab. A 1.7). Natürlich kann man die Schmelz- bzw. Verdampfungswärme auch auf die Stoffmenge beziehen und erhält dadurch die *molekulare Schmelzwärme* bzw. die *molekulare Verdampfungswärme*.

Da diese Wärmemengen keine Temperaturänderung bewirken, wie wir es bei Wärmezufuhr erwarten würden, nennen wir sie *latent* (verborgen).

7.2 Phasendiagramme

Um das Verhalten eines Stoffes bei seinen Zustandsänderungen grafisch zu beschreiben werden folgende Phasendiagramme verwendet:



Im p - V -Diagramm (a) wird das Verhalten des Drucks in Abhängigkeit von Volumenveränderungen bei jeweils konstanter Temperatur beschrieben. Jede Linie ist also eine *Isotherme*, d.h. eine Linie konstanter Temperatur. Verläuft die Isotherme oberhalb des

kritischen Punktes C, so findet kein Phasenübergang statt. Bei deutlich höheren Temperaturen als T_c , bzw. auch bei kleineren Temperaturen und sehr kleinen Drücken, verhält sich der Stoff wie ein ideales Gas. Hier gilt die Zustandsgleichung des idealen Gases $pV = NkT$, also beschreibt eine Isotherme eine Hyperbel. Wenn wir uns dem kritischen Punkt nähern verhält sich die Kurve nach der Van-der-Waalsschen Zustandsgleichung für reale Gase und erhält daher einen Schlenker, der sich unterhalb von C sogar zu einem lokalen Maximum und Minimum ausprägt. In diesem Bereich findet der Phasenübergang zwischen flüssiger Phase (links) und Gas (rechts) statt. Das p - T -Diagramm (b) beschreibt die jeweiligen Aggregatzustände in Abhängigkeit von Druck und Temperatur. Besonders markant ist hier der *Tripelpunkt T*, in dem alle drei Aggregatzustände gleichzeitig vorliegen. Die Kurven, die die Phasen voneinander trennen, werden entsprechend den dort ablaufenden Phasenumwandlungen Schmelz-, Siede- bzw. Sublimationskurve genannt. Betrachten wir die Isobare A→E in beiden Diagrammen, so fällt auf, dass das Zweiphasengebiet in (a) zwischen B und D im Diagramm (b) auf einen einzigen Punkt auf der Siedekurve reduziert wird, da sich wie oben schon erwähnt die Temperatur während des Phasenübergangs nicht verändert. Man sieht auch deutlich dass im Diagramm (b) die Siedekurve im kritischen Punkt C endet, woraus wieder hervorgeht, dass oberhalb der kritischen Temperatur keine verschiedenen Phasen mehr existieren.

7.3 Bestimmung der Wärmekapazität eines Kalorimetergefäßes

Um mit einem Kalorimeter Messungen zu spezifischen Schmelz- bzw. verdampfungswärmen eines bestimmten Stoffes durchzuführen, sollte die Wärmekapazität des Kalorimetergefäßes bekannt sein, da sie sonst das Ergebnis verfälscht, wenn sie außer Acht gelassen wird. Zur ihrer Bestimmung kann man folgendermaßen vorgehen:

Zunächst wird eine Flüssigkeit mit bekannter spezifischer Wärmekapazität (z.B. Wasser, $c_W = 4,182 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$)⁴ und bekannter Masse m_1 in das Kalorimetergefäß gegeben. Nachdem sich die Temperatur des Gefäßes und der Flüssigkeit angepasst haben, wird ihre gemeinsame Temperatur T_1 ermittelt.

Dann wird wiederum eine bestimmte Masse m_2 der selben Flüssigkeit, aber mit deutlich höherer Temperatur T_2 gegeben. Nach kurzer Zeit stellt sich dann in der gesamten Flüssigkeit eine Mischungstemperatur T_m ein, welche ebenfalls ermittelt wird.

Da die gesamte Wärme des Systems sich nicht verändert hat (Energieerhaltungssatz) gilt nun:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

mit $\Delta Q_1 = C_{\text{Kal}}\Delta T_1 + c_W m_1 \Delta T_1 = (C_{\text{Kal}} + c_W m_1)(T_m - T_1)$

und $\Delta Q_2 = c_W m_2 \Delta T_2 = c_W m_2 (T_2 - T_m)$

also

$$C_{\text{Kal}} = c_W m_2 \frac{T_2 - T_m}{T_m - T_1} - c_W m_1$$

⁴Walcher, Tab. A 1.7

7.4 Bestimmung der spezifischen Schmelzwärme von Eis

Zur Bestimmung der spezifischen Schmelzwärme von Eis gibt man warmes Wasser der Masse m_W in ein Dewargefäß mit bekannter Wärmekapazität C_K . Dabei ergibt sich dann eine Mischungstemperatur T_1 . Nun wird das Eis der Masse m_E mit bekannter Temperatur T_E hinzugegeben. Nach einiger Zeit stellt sich erneut eine Mischungstemperatur T_M ein, und es muss entsprechend dem Energieerhaltungssatz gelten:

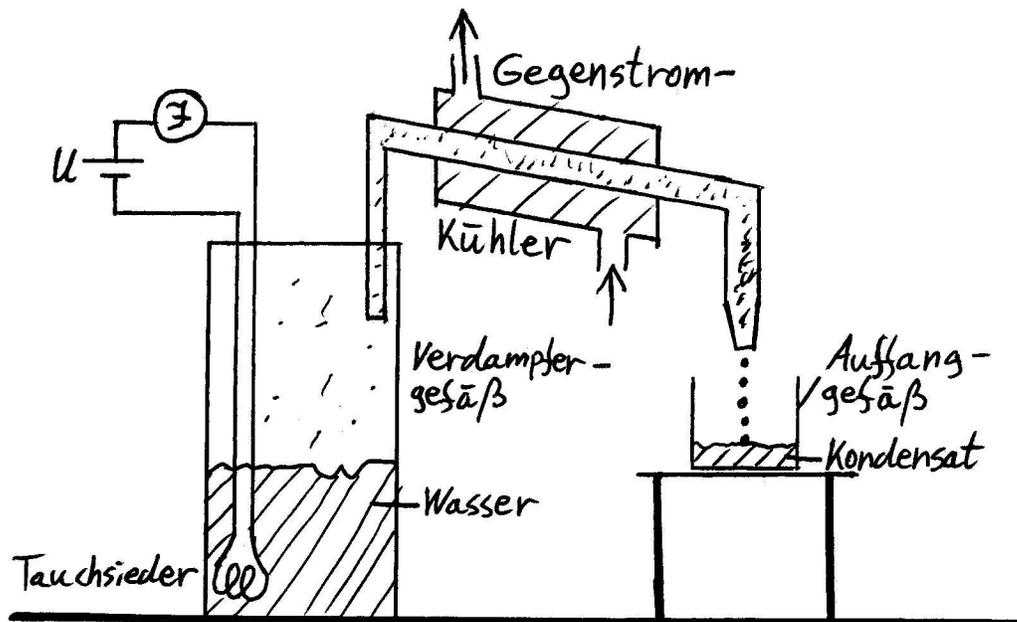
$$m_E \cdot q_S + m_E \cdot c_W \cdot (T_M - T_E) = (m_W \cdot c_W + C_K) \cdot (T_1 - T_M)$$

Lösen wir also für $T_E = 0^\circ\text{C}$ nach der gesuchten Größe q_S auf, so erhalten wir

$$q_S = \frac{(m_W \cdot c_W + C_K) \cdot (T_1 - T_M) - m_E \cdot c_W \cdot (T_M - T_E)}{m_E}$$

7.5 Bestimmung der spezifischen Verdampfungswärme von Wasser

7.5.1 Die Verdampfungsmethode



Zur Bestimmung der spezifischen Verdampfungswärme von Wasser bringen wir dieses mit einem Tauchsieder zum Verdampfen. Dabei wird Spannung und Stromstärke gemessen, woraus sich dann mit der zeitlichen Dauer die zugeführte Wärmemenge $\Delta Q = U \cdot I \cdot t$ errechnet. Das verdampfte Wasser wird in einem Gegenstromkühler wieder kondensiert und aufgefangen. Nach der bestimmten Zeit t wird die Masse m des Kondensats ermittelt. Nach dem Energieerhaltungssatz muss

$$U \cdot I \cdot t = q_V \cdot m + \Delta W$$

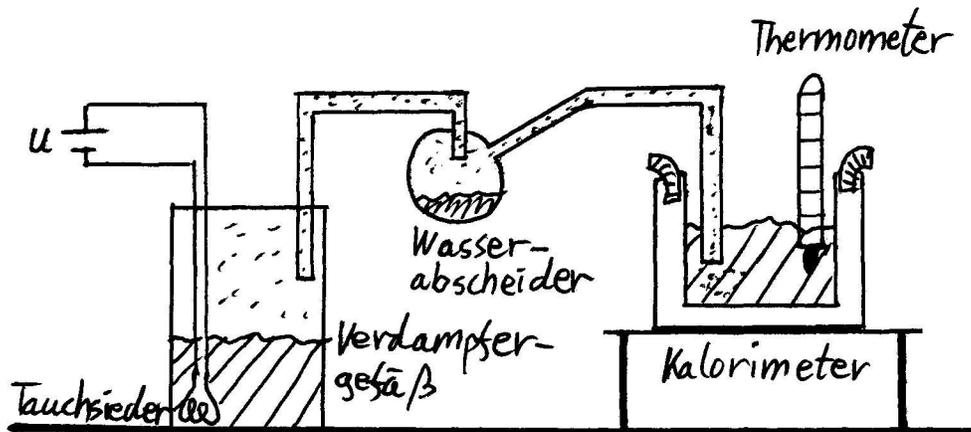
also

$$q_V = \frac{U \cdot I \cdot t - \Delta W}{m}$$

gelten, wobei ΔW ein durch die Methode bedingter Fehler ist, der vor allem durch Wärmeverluste entsteht. Um diesen möglichst gering zu halten, führt man die Messung zweimal mit je unterschiedlichen Strom- und Spannungswerten durch und subtrahiert die Gleichung der ersten Messung von der der zweiten Messung. Damit ergibt sich

$$q_V = \frac{t \cdot (U_1 \cdot I_1 - U_2 \cdot I_2)}{m_1 - m_2}$$

7.5.2 Die Kondensationsmethode



Für eine andere Methode gehen wir folgendermaßen vor: In ein Kalorimetergefäß mit Wasser der Masse m_W und Anfangstemperatur T_1 wird Wasserdampf der Temperatur T_S (Siedetemperatur) eingeleitet. Der Dampf kondensiert am kühleren Wasser und erwärmt dadurch das Wasser. Die sich dabei einstellende Mischungstemperatur T_M , sowie die Masse des eingeleiteten Dampfes m_D sind zu ermitteln, und es gilt

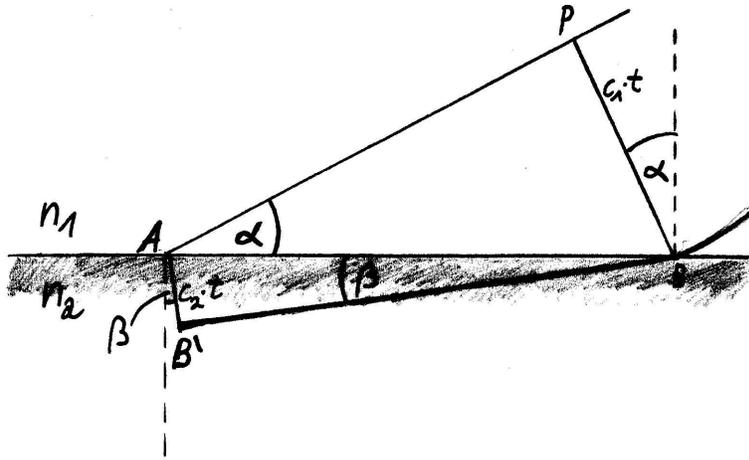
$$(m_W \cdot c_W + C_K) \cdot (T_M - T_1) = m_D \cdot c_W \cdot (T_S - T_M) + m_D \cdot q_V$$

oder aufgelöst nach der gesuchten Größe

$$q_V = \frac{(m_W \cdot c_W + C_K) \cdot (T_M - T_1) - m_D \cdot c_W \cdot (T_S - T_M)}{m_D}$$

8 Fresnelsche Formeln

8.1 Das Snelliussche Brechungsgesetz



Wenn ein Lichtbündel unter einem Winkel α auf ein Medium anderer Dichte (z.B. Glas) trifft, so kommen nicht alle Strahlen gleichzeitig an der Grenzfläche an. Während der Strahl vom Punkt P noch die Strecke $c_1 t$ zurücklegt, befindet sich der andere Strahl schon im Medium, was zu einer langsameren Fortpflanzungsgeschwindigkeit führt. Daher legt dieser Strahl vom Punkt A aus nur den Weg $c_2 t$ zurück ($c_2 < c_1$).

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABP ergibt sich:

$$\sin \alpha = \frac{c_1 t}{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{c_1 t}{\sin \alpha}$$

Analog gilt für das Dreieck AB'B:

$$\sin \beta = \frac{c_2 t}{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{c_2 t}{\sin \beta}$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir:

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2}$$

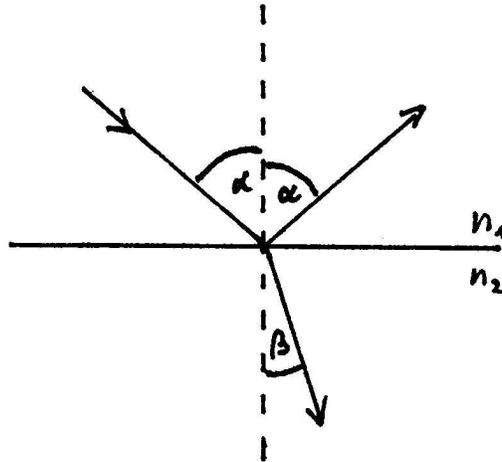
Außerdem gilt:

$$c_1 = \frac{c}{n_1} \text{ und } c_2 = \frac{c}{n_2}$$

Dies oben eingesetzt, erhalten wir das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

8.2 Reflexion und Brechung am optisch dichteren Medium



Trifft ein einfallendes Lichtbündel auf die Grenzfläche zu einem optisch dichteren Medium, so wird ein Teil des Lichts nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochen und durchdringt das Medium, während der andere Teil an der Grenzfläche reflektiert wird, wobei Einfallswinkel = Ausfallswinkel gilt.

8.3 Die Fresnelschen Formeln

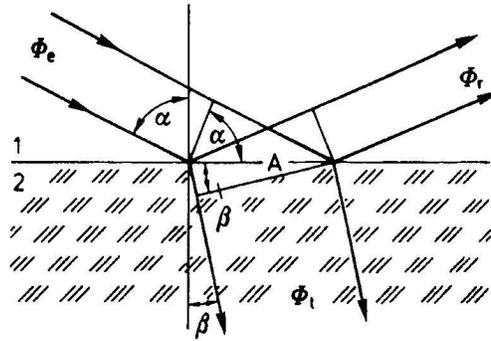
Es gibt insgesamt vier Fresnelsche Formeln, welche zusammen die Intensitätsverhältnisse zwischen einfallendem, ausfallendem und gebrochenem Lichtbündel, aber auch zwischen den einzelnen Polarisationsrichtungen an einer Grenzfläche zum optisch dichteren Medium beschreiben. Abgeleitet wurden sie von *A. Fresnel* zunächst aus seiner *elastischen Lichttheorie*. Erheblich einfacher ist aber die Ableitung aus der Theorie der elektromagnetischen Wellen, welche durch die *Maxwellschen Gleichungen* beschrieben wird.

Reflexion und Brechung des Lichtes spielen sich in einer schmalen Schicht um die Trennfläche zweier aneinanderstoßender Medien ab, somit genügt es, diese Grenzfläche genauer zu betrachten. Die quantitative Beschreibung der Vorgänge gestattet die elektromagnetische Lichttheorie, welche Aussagen über die Feldvektoren E und B macht. Die mittlere räumliche Energiedichte eines elektromagnetischen Wellenfeldes ist gleich μE^2 , daraus lässt sich die zeitliche und flächenbezogene Energiemenge folgern:

$$S = \frac{c_0}{n} \varepsilon E^2$$

wobei ε die Dielektrizitätskonstante, $\frac{c_0}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im betrachteten Medium, n die absolute Brechungszahl und c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Für die meisten Stoffe ist die Abweichung der Permeabilität μ vom Vakuumwert μ_0 (magnetische Feldkonstante) vernachlässigbar klein, so dass mit üblicher Vereinfachung $\mu \approx \mu_0$ folgt:

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E^2$$



Das parallele Lichtbündel (mit Strahlungsleistung Φ_e), das mit dem Winkel α auf die ebene Trennfläche zweier Medien 1 und 2 fällt, bestrahlt dort den Querschnitt A der Trennfläche. Das Lichtbündel spaltet sich nach dem Brechungs- und dem Reflexionsgesetz in zwei Anteile auf, die ihren Weg unter den Winkeln α und β zur Trennflächennormalen fortsetzen. Wegen der Energieerhaltung gilt, dass die Strahlenleistung $\Phi_e = S_e A \cos \alpha$ vom einfallenden Lichtbündel vom Querschnitt $A \cos \alpha$, gleich der Summe der Strahlungsleistungen des reflektierten und des gebrochenen Strahls ist.

$$\Phi_e = \Phi_r + \Phi_t$$

somit

$$S_e A \cos \alpha = S_r A \cos \alpha + S_t A \cos \beta \quad (2)$$

Durch Einsetzen der elektrischen Feldvektoren unter sinngemäßer Beibehaltung der Indizes e , r und t folgt

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_e^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_r^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} E_t^2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Die Indizes 1 und 2 an den Dielektrizitätskonstanten ε beziehen sich auf das zugehörige Medium. Mittels der Maxwell'schen Beziehung

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{\text{rel}}$$

lässt sich die relative Brechzahl n_{rel} einführen. Mit der Abkürzung f_α für den Quotienten der Bündelquerschnitte erhalten wir die Formel

$$f_\alpha = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{n_{\text{rel}}^2 - \sin^2 \alpha}}{n_{\text{rel}} \cos \alpha} = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n_{\text{rel}}^2}\right) \tan^2 \alpha}$$

in der der Winkel β mit Hilfe des Snelliusschen Brechungsgesetzes eliminiert wurde. Damit reduziert sich (1) schließlich zu

$$E_e^2 - E_r^2 = n_{\text{rel}} f_\alpha E_t^2 \quad (3)$$

Zur weiteren Behandlung sind die elektrischen Feldvektoren in die beiden Komponenten parallel E_{\parallel} und senkrecht E_{\perp} zur Einfallsebene zu zerlegen. (2) gilt für beide Komponenten einzeln, somit kann die Komponentenrechnung skalar ablaufen. Betrachten wir

zunächst E_{\perp} , was die Tangentialkomponente zur Trennfläche und daher beiderseits der Trennfläche gleich groß ist:

$$E_{e\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp} \quad (4)$$

Aus (2)/(3) erhalten wir

$$E_{e\perp} - E_{r\perp} = n_{\text{rel}} f_{\alpha} E_{t\perp} \quad (5)$$

Nun kann (3) in (4) eingesetzt und dadurch $E_{t\perp}$ eliminiert werden. Wird nach $\frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}}$ aufgelöst, erhalten wir damit das Reflexionsverhältnis ρ_{\perp} :

$$\rho_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}} = -\frac{n_{\text{rel}} f_{\alpha} - 1}{n_{\text{rel}} f_{\alpha} + 1} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Eliminieren wir $E_{r\perp}$ anstatt $E_{t\perp}$, so erhalten wir das Transmissionsverhältnis σ_{\perp} :

$$\sigma_{\perp} = \frac{E_{t\perp}}{E_{e\perp}} = \frac{2}{n_{\text{rel}} f_{\alpha} + 1} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Auch die parallelen Komponenten besitzen einen tangentialen Anteil, so dass wir analog vorgehen können. Hierbei gilt

$$E_{e\parallel} \cos \alpha + E_{r\parallel} \cos(\pi - \alpha) = E_{t\parallel} \cos \beta$$

und somit

$$E_{e\parallel} - E_{r\parallel} = f_{\alpha} E_{t\parallel}$$

Nun kommen wir durch Division von (2) durch die letzte Gleichung schließlich zum Reflexionsverhältnis für parallele Komponenten

$$\rho_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{e\parallel}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

sowie zum Transmissionsverhältnis

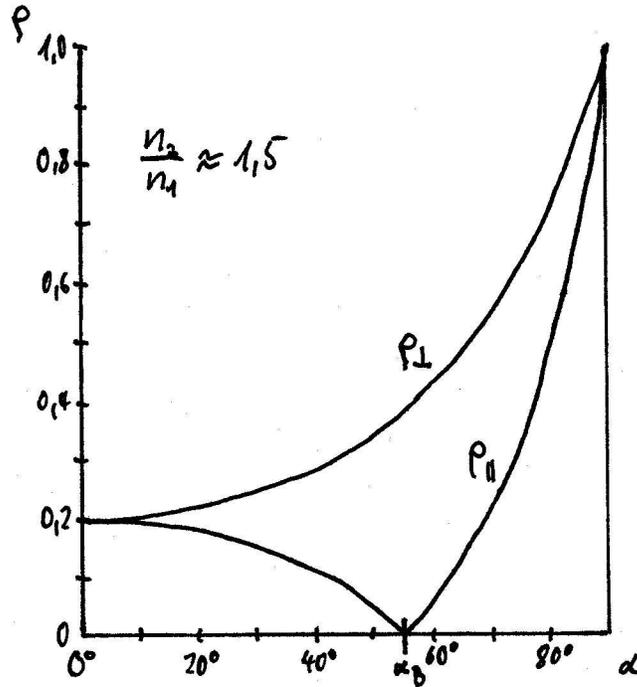
$$\sigma_{\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{E_{e\parallel}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$

Diese vier Formeln beschreiben eigentlich schon ausreichend die gesuchten Koeffizienten, allerdings kommt hier immer der Winkel β vor, welcher im Versuch nicht zu messen ist. Wird dieser noch mit dem Brechungsgesetz eliminiert, so erhalten wir die folgenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= \frac{\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha\right)^2}{n^2 - 1} \\ \sigma_{\perp} &= \frac{2 \cos \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha}{n^2 - 1} \\ \rho_{\parallel} &= \left| \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right| \\ \sigma_{\parallel} &= \frac{2n \cos \alpha}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \end{aligned}$$

8.4 Der Verlauf der Reflexionskoeffizienten

Mit den oben hergeleiteten Koeffizienten ergibt sich folgender Verlauf der Reflexionsverhältnisse mit dem Einfallswinkel α :



ρ_{\parallel} wird hier beim *Brewsterwinkel* α_B Null.

8.5 Der Brewsterwinkel

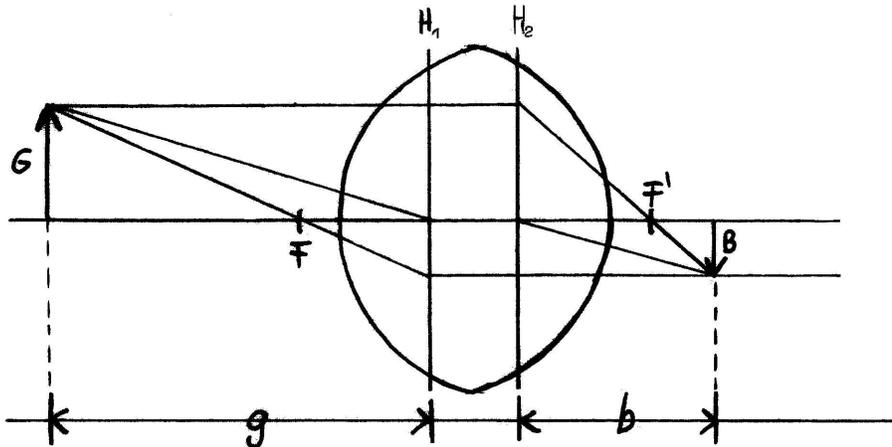
Wie man im obigen Diagramm erkennen kann, gibt es eine Nullstelle für ρ_{\parallel} . Dieser besondere Winkel wird *Brewsterwinkel* genannt. In diesem Fall stehen der gebrochene und der reflektierte Strahl genau im rechten Winkel zueinander, weshalb kein paralleler Anteil zur Einfallsebene in dem reflektierten Lichtbündel vorhanden ist. Das reflektierte Licht ist also vollständig senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Für den Brewsterwinkel gilt

$$\tan \alpha_B = \frac{n_1}{n_2}$$

9 Linsensysteme

9.1 Dicke Linsen

Der Strahlengang bei dicken Linsen kann wie folgt beschrieben werden:



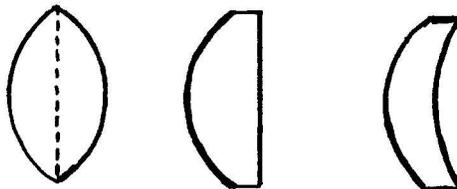
- Der Parallelstrahl läuft durch die Linse bis zur zweiten Hauptebene H' und wird dann zum Bildbrennpunkt F' hin gebrochen.
- Der Brennpunktstrahl geht durch den Objektbrennpunkt F bis zur ersten Hauptebene H und wird dann zum Parallelstrahl gebrochen.
- Der Mittelpunktstrahl läuft in den Schnittpunkt der ersten Hauptebene mit der opt. Achse und läuft dann aus dem Schnittpunkt der Achse mit der zweiten Hauptebene parallel versetzt weiter.

9.2 Strahlengänge für verschiedene Linsenarten

Im folgenden werden nur noch dünne Linsen betrachtet.

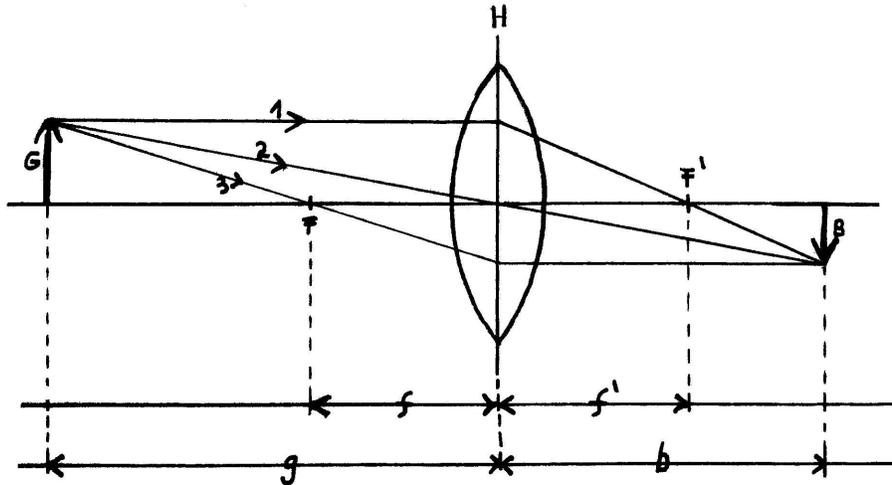
9.2.1 Sammellinsen

Alle Sammellinsen, ob bikonvex, plankonvex oder konkav-konvex (im Bild v.l.n.r.), haben die Gemeinsamkeit, dass sie in der Mitte dicker sind und zum Rand hin dünner werden.



Zum Strahlengang ist folgendes festzustellen:

- Parallelstrahlen (zur opt. Achse) werden zum Brennpunkt hin gebrochen.
- Mittelpunkt-Strahlen werden nicht beeinflusst.
- Strahlen, die aus dem Brennpunkt kommen, werden zu Parallelstrahlen gebrochen.

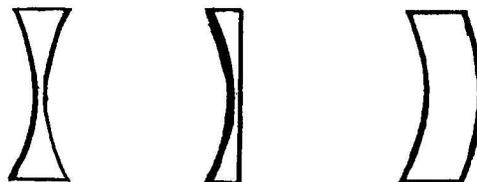


Alle diese Strahlen, die von demselben Gegenstandspunkt ausgehen, schneiden sich in einem einzigen Bildpunkt. Führt man diese Konstruktion für alle Gegenstandspunkte aus, so ergibt sich das Bild, welches in einer Ebene (Bildebene) liegt und mit einem Schirm sichtbar gemacht werden kann. Daher wird dieses Bild auch reell genannt.

Soll die Sammellinse als einfacher Projektor (oder Fotoapparat) dienen, so muss die Entfernung zum Gegenstand größer als die Brennweite sein, da sonst kein reelles, sondern nur ein virtuelles Bild (s. Zerstreuungslinse) entstehen kann.

9.2.2 Zerstreuungslinsen

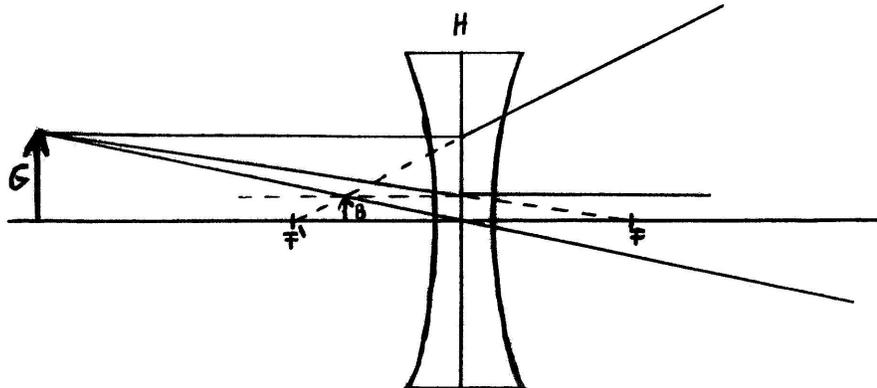
Zerstreuungslinsen sind im Gegensatz zu den Sammellinsen in der Mitte dünner als am Rand. Das Bild zeigt v.l.n.r.: bikonkav, plankonkav und konvex-konkav.



Hier gilt für den Strahlengang folgendes:

- Parallelstrahlen werden so gebrochen, dass sie aus dem Brennpunkt zu kommen scheinen.
- Strahlen, die auf den Brennpunkt hinter der Linse zulaufen, werden zu Parallelstrahlen gebrochen.

- Mittelpunkt-Strahlen werden nicht beeinflusst.



Auch hier schneiden sich die gebrochenen Strahlen, allerdings liegen die Schnittpunkte auf einer Bildebene vor der Linse (auf der Gegenstandsseite) und können daher nicht mit einem Schirm sichtbar gemacht werden. In diesem Fall spricht man von einem virtuellen Bild.

9.2.3 Die Abbildungsgleichung

Für solche Abbildungen mit einfachen Linsen (s.o.) gilt für Bild-, Gegenstands- und Brennweite die Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Hierbei ist f die Brennweite der Linse, wobei diese bei Sammellinsen größer als Null und bei Zerstreuungslinsen kleiner als Null ist. Die Gegenstandsweite g ist der Abstand des Gegenstandes von der Hauptebene der Linse. Für die Bildweite, also den Abstand des Bildes zur Linse steht b , welches beim reellen Bild größer, beim virtuellen Bild kleiner als Null ist.

9.2.4 Der Abbildungsmaßstab

Aus der Konstruktion für die Sammellinse erkennt man mit Hilfe des Strahlensatzes, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

Hierbei ist β der Abbildungsmaßstab, welcher das Verhältnis zwischen Bildgröße und Gegenstandsgröße, sowie zwischen Bildweite und Gegenstandsweite ist.

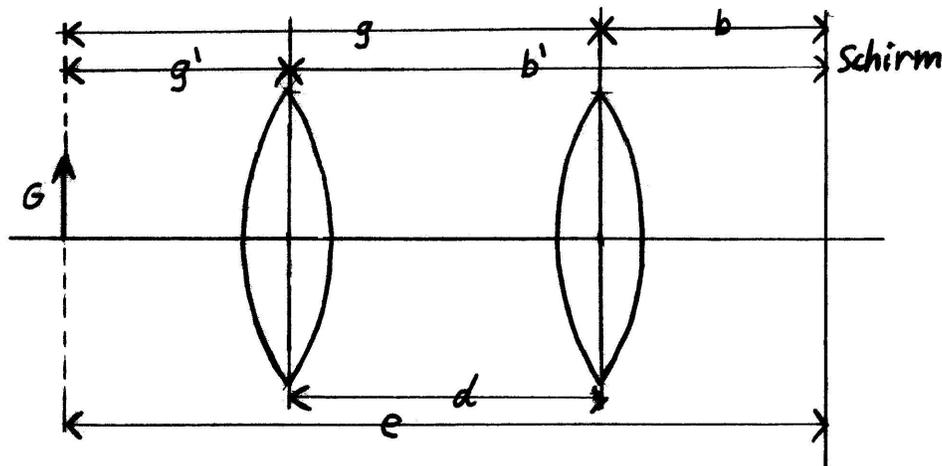
9.3 Bestimmung von Linsenbrennweiten

9.3.1 Autokollimation

Zur Bestimmung der Brennweite einer Sammellinse kann das Autokollimationsverfahren verwendet werden. Hierbei wird auf der Bildseite (hinter der Linse) ein Spiegel angebracht, der das Bild des Gegenstandes wieder durch die Linse zurückwirft. Wenn durch Veränderung des Abstandes zwischen Linse und Gegenstand dieser scharf auf die Gegenstandsebene selber abgebildet wird, so steht der Gegenstand genau in der Brennebene der Linse, d.h. der Abstand des Gegenstandes zur Linse entspricht der Brennweite f .

9.3.2 Bessel-Verfahren

Ein weiteres Verfahren zur Brennweitenbestimmung bei Sammellinsen ist das Bessel-Verfahren. Hier werden Gegenstand G und Schirm (Bildebene) B in dem festen Abstand e zueinander aufgestellt. Durch Verschieben der zu bestimmenden Linse zwischen G und B erhält man zwei Positionen, in denen der Gegenstand scharf auf dem Schirm abgebildet wird. Zur Brennweitenbestimmung muss der Abstand d zwischen den beiden Positionen gemessen werden.



Da für beide Positionen die Abbildungsgleichung gelten muss, gilt:

$$g = b' \text{ und } g' = b$$

Damit und aus der Abbildung erhält man:

$$g + b = e \tag{6}$$

$$g - b = d \tag{7}$$

Die Summe aus Gleichung (1) und Gleichung (2) ergibt:

$$g = \frac{1}{2}(e + d)$$

Analog erhalten wir aus der Differenz:

$$b = \frac{1}{2}(e - d)$$

Werden diese Werte für b und g nun in die Abbildungsgleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ eingesetzt, so ergibt sich für die Brennweite:

$$f = \frac{1}{4} \left(e - \frac{d^2}{e} \right)$$

9.3.3 Abbildungsverfahren

Im Gegensatz zur Sammellinse kann die Zerstreuungslinse nur virtuelle Bilder erzeugen, daher ist es notwendig, direkt hinter der Zerstreuungslinse eine Sammellinse mit bekannter Brennweite anzubringen, welche die divergierenden Lichtstrahlen sammelt, und somit ein reales Bild erzeugt, das mit einem Schirm sichtbar gemacht werden kann. Der Abstand der beiden Linsen muss dabei klein sein gegenüber den anderen Abständen in der Anordnung. Für das so erhaltene Linsensystem lassen sich Bildweite b und Gegenstandsweite g messen.

In dem Linsensystem gilt wieder die Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{f_{ges}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Außerdem gilt in diesem Linsensystem:

$$\frac{1}{f_{ges}} = \frac{1}{f_S} + \frac{1}{f_Z}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir eine Formel zur direkten Bestimmung der Brennweite der Zerstreuungslinse:

$$f_Z = \frac{1}{\frac{g+b}{gb} - \frac{1}{f_S}}$$

9.3.4 Linsensysteme

Brennweiten von Linsensystemen lassen sich mit einem Verfahren nach Walcher – „Praktikum der Physik“ bestimmen:

Ausgehend von der Abbildungsgleichung erhält man durch Multiplikation mit g :

$$\frac{g}{f} = 1 + \frac{g}{b}$$

Darin wird dann die Gleichung für den Abbildungsmaßstab eingesetzt:

$$\beta = \frac{b}{g} \Leftrightarrow \frac{g}{b} = \frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{f} = 1 + \frac{1}{\beta}$$

Da sich die Gegenstandsweite aufgrund der nicht bekannten Hauptebene nicht bestimmen lässt, wird ein Bezugspunkt P eingeführt, der von dem Gegenstand den Abstand x und zur unbekanntenen Hauptachse den Abstand l besitzt. Daraus ergibt sich:

$$g = x - l$$

In obige Gleichung eingesetzt erhalten wir:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 = \frac{x - l}{f} - 1$$

Umgeformt ergibt dies eine Geradengleichung:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}x - \left(1 + \frac{l}{f}\right)$$

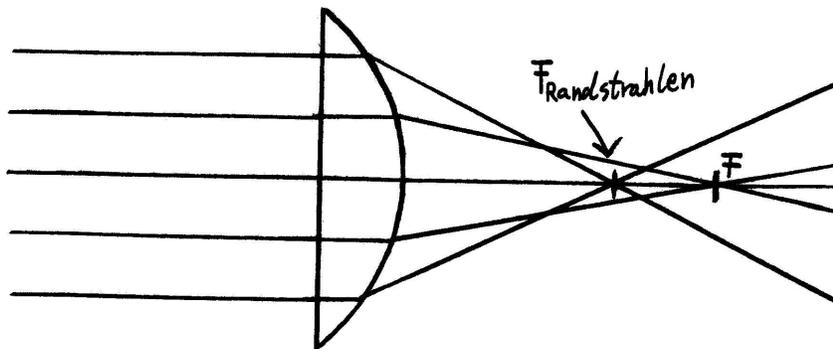
mit der Steigung $m = \frac{1}{f}$ und dem y-Achsenabschnitt $S = -\left(1 + \frac{l}{f}\right)$. Den Abbildungsmaßstab β erhält man aus dem Zusammenhang zwischen Gegenstandsgröße und Bildgröße $\beta = \frac{B}{G}$. Die Steigung m und den Achsenabschnitt S entnimmt man dem Diagramm und kann somit die Brennweite f , sowie die Lage der ersten Hauptebene bestimmen.

Zur Bestimmung der zweiten Hauptebene muss die ganze Prozedur wiederholt werden, wobei die Versuchsanordnung vorher umgedreht wird.

9.4 Linsenfehler

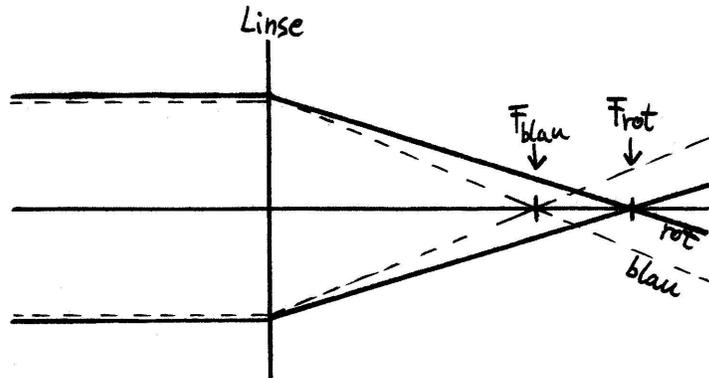
9.4.1 Sphärische Aberration

Bei einer Sammellinse werden bekanntermaßen parallel einfallende Strahlen zum Brennpunkt hin gebrochen. Dies gilt aber in der Praxis nur für Strahlen, die nahe der optischen Achse der Linse einfallen. Achsferne Strahlen werden hinter der Linse nicht in einem einzigen Punkt fokussiert, sondern umso näher bei der Linse, je weiter der Strahl von der Achse entfernt ist. Dieser Fehler ist umso größer, je kleiner die Linsenbrennweite ist. Zur Kompensation der Sphärischen Aberration können die achsfernen Strahlen durch eine Blende ausgeblendet werden, oder mehrere Linsen unterschiedlicher Brennweite zu einem Linsensystem kombiniert werden.



9.4.2 Chromatische Aberration

Die Chromatische Aberration (Farbfehler) ist auf die Brechzahl des Linsenmaterials zurückzuführen, da diese von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Je kürzer die Wellenlänge, desto kürzer also auch die Brennweite. Daher kann ein weiß leuchtender Gegenstand nicht mit einer Sammellinse optimal scharf abgebildet werden. Diese Farbzerstreuung kann durch komplizierte Systeme aus Linsen von unterschiedlichem Material (z.B. Kombination einer Sammellinse aus Kronglas mit einer Zerstreuungslinse aus Flintglas) kompensiert werden.



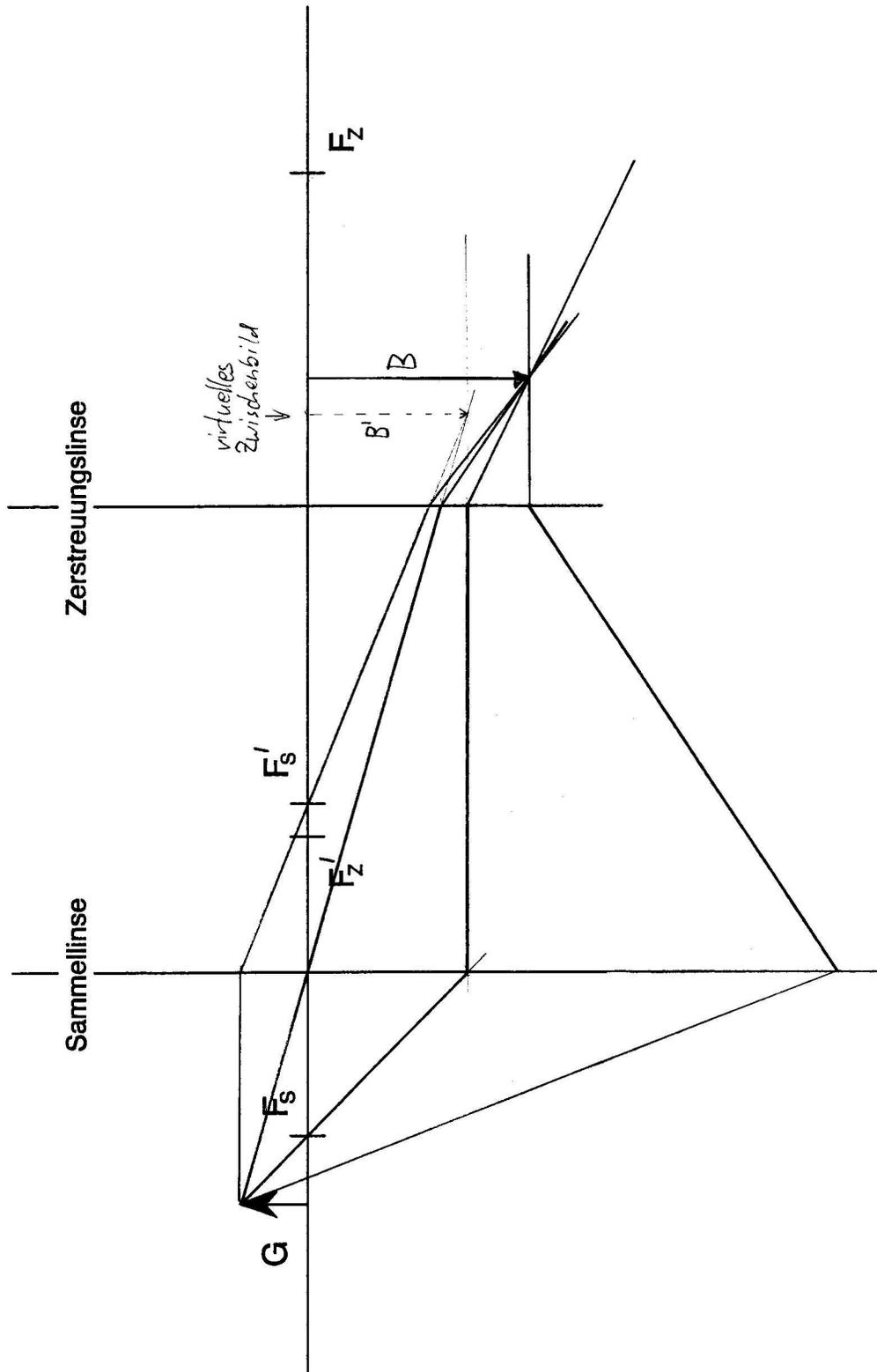
9.4.3 Astigmatismus

Fallen parallele Strahlen unter einem Winkel zur optischen Achse ein, so werden sie idealerweise in einem Punkt in der Brennebene fokussiert. Je größer der Winkel zur Achse ist, desto weiter ist der tatsächliche Brennpunkt von der Brennebene entfernt. Die Brennebene ist also eine gekrümmte Fläche, so dass auf einem ebenen Schirm kein scharfes Bild entstehen kann. Dieser Effekt kann durch Ausblendung der Strahlen, die gegen die Achse zu stark geneigt sind, behoben werden.

9.4.4 Koma

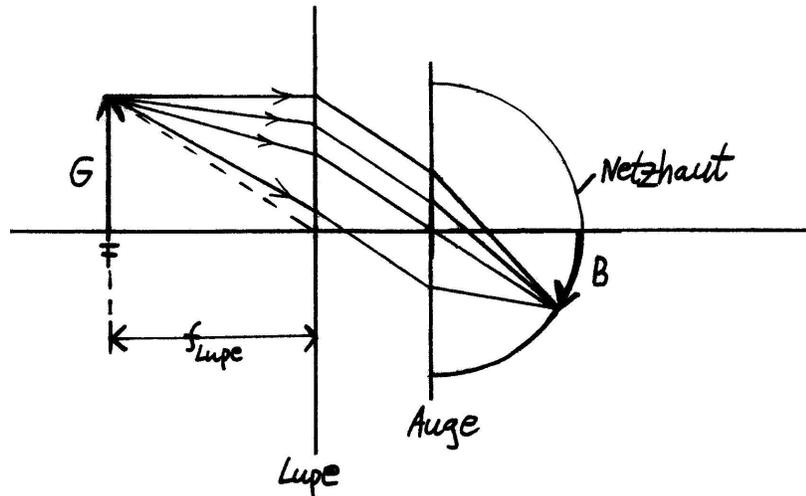
Liegt ein abzubildender Punkt stark abseits der optischen Achse, so erhält man auf dem Schirm keine punktförmige Abbildung, sondern ein stark verzerrtes ovales Bild mit kometenähnlichem Schweif (daher die Bezeichnung „Koma“). Eine Beseitigung oder zumindest Abschwächung des Effekts wird durch eine Reduzierung der Intensität (Abblenden) der Lichtquelle erreicht.

9.5 Konstruktion des Strahlengangs durch ein Linsensystem



9.6 Optische Instrumente

9.6.1 Die Lupe



Wird ein Gegenstand durch eine Sammellinse betrachtet, so kann man ihn viel näher ans Auge rücken und trotzdem noch scharf sehen, wobei das Bild auf der Netzhaut durch das Heranrücken, sowie durch den Vergrößerungseffekt der Sammellinse größer wird. In solcher Funktion wird eine Sammellinse Lupe genannt.

Wird ein Gegenstand mit bloßem Auge betrachtet, so gibt es eine minimale Entfernung zum Auge, in der er noch scharf gesehen wird, die *deutliche Sehweite* s_0 . Daraus und aus der Gegenstandsgröße erhalten wir den Sehwinkel ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{G}{s_0}$$

In der Abbildung oben ist eine Sammellinse mit einer kleinen Brennweite (kleiner als s_0) vor das Auge gebracht. Der Gegenstand befindet sich in der Brennebene der Linse, so dass die von ihm ausgehenden Lichtstrahlen die Linse parallel verlassen. Dadurch scheint der Gegenstand für das Auge im Unendlichen zu liegen, und kann somit entspannt betrachtet werden. Steht die Sammellinse (nahezu) im Kontakt mit der Augenlinse, so ergibt sich ein Sehwinkel von näherungsweise:

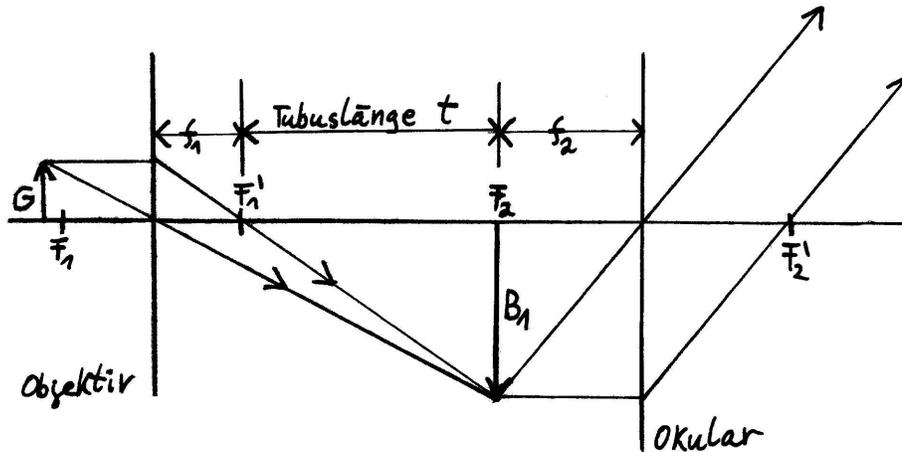
$$\varepsilon = \frac{G}{f}$$

Das Verhältnis der beiden Sehwinkel wird *Vergrößerung* oder *Winkelvergrößerung* γ genannt und ist folgendermaßen definiert:

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f}$$

9.6.2 Das Mikroskop

Das Mikroskop dient dazu, sehr kleine Gegenstände in geringem Abstand und mit sehr großer Vergrößerung zu betrachten. Hierfür werden im einfachsten Fall zwei Sammellinsen hintereinander angeordnet. Die Linse nahe dem Gegenstand nennt man *Objektiv*, die andere *Okular*. Das Objektiv erzeugt vom Gegenstand ein reelles, vergrößertes und umgekehrtes Bild, welches mit dem als Lupe verwendeten Okular vom Auge betrachtet wird. Dadurch, dass das Zwischenbild in der Brennebene des Okulars liegt, sieht das Auge ein unendlich fernes Bild, welches entspannt betrachtet werden kann. Das Okular dient dazu, dass das vom Objektiv erzeugte Bild nahe an das Auge herangeführt werden kann. Da die Lupe ein virtuelles aufrechtes Bild erzeugt, steht das Endbild auf dem Kopf.



Den Abstand zwischen dem zweiten Brennpunkt des Objektivs und dem ersten Brennpunkt des Okulars nennt man die *Tubuslänge* t , welche in der Praxis meist bei 16 cm liegt. Aus dem Bild und dem Strahlensatz erhalten wir den Abbildungsmaßstab des Objektivs:

$$V_1 = \frac{B}{G} = -\frac{t}{f_1}$$

Die Winkelvergrößerung des Okulars ist (s. Lupe):

$$\gamma_2 = \frac{s_0}{f_2}$$

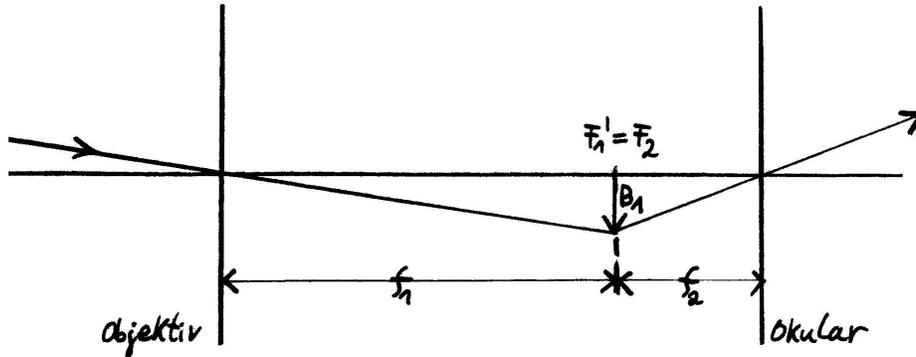
Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops ist das Produkt aus Abbildungsmaßstab des Objektivs und Vergrößerung des Okulars:

$$\gamma_M = V_1 \gamma_2 = -\frac{t}{f_1} \frac{s_0}{f_2}$$

9.6.3 Das astronomische Fernrohr

Das astronomische Fernrohr dient dazu, sehr weit entfernte Gegenstände zu betrachten. Die Wirkung besteht darin, dass das Bild näher herangebracht wird, also der Sehwinkel

vergrößert wird. Im Wesentlichen sind die Bestandteile wie beim Mikroskop zwei Sammellinsen. Wieder erzeugt das Objektiv ein reelles, umgekehrtes Bild, welches mit dem Okular betrachtet wird. Wenn der Gegenstand sehr fern ist, entsteht das Zwischenbild am zweiten Brennpunkt des Objektivs, und die Bildweite ist gleich der Brennweite f_1 . Die Linsen sind so angeordnet, dass ihre Brennpunkte zusammenfallen, dadurch steht das Zwischenbild also wiederum in der Brennebene des Okulars und kann deshalb mit entspanntem Auge betrachtet werden. Prinzipiell kann man also auch von einem Mikroskop mit der Tubuslänge 0 sprechen.



$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ist wieder der Sehwinkel für die Betrachtung mit bloßem Auge, für den gilt:

$$\tan \varepsilon_1 = -\frac{B}{f_1} \approx \varepsilon_1$$

Die Näherung gilt für kleine Winkel. Für den Sehwinkel am Okular gilt analog zur Lupe:

$$\varepsilon_2 \approx \frac{B}{f_2}$$

Für die Vergrößerung erhalten wir dann:

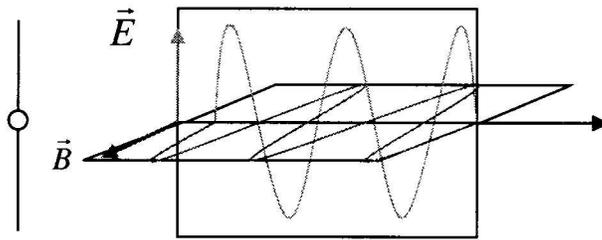
$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass für eine hohe Vergrößerung ein Objektiv mit großer und ein Okular mit kleiner Brennweite verwendet werden muss.

10 Polarisation, Doppelbrechung und Beugung

10.1 Polarisation von Licht

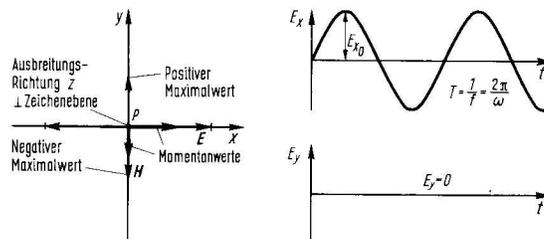
Licht ist eine elektromagnetische Welle, die von den schwingenden Elektronen der Atome ausgesandt wird. Nimmt man an, nur ein einziges Elektron schwingt in einer Ebene, dann breitet sich das elektrische Feld \vec{E} in der Schwingungsebene des Dipols aus, das Magnetfeld \vec{B} steht senkrecht dazu. Die maximale Intensität wird in Richtung \vec{s} senkrecht zum Dipol abgestrahlt, in Richtung der Dipolachse ist die Intensität null. Ist \vec{s} die Ausbreitungsrichtung, dann bezeichnet man die von \vec{B} und \vec{s} aufgespannte Ebene als die Polarisationsebene der Welle. Die vom Dipol abgestrahlte Welle ist linear polarisiert.



Im Gegensatz zu polarisiertem Licht, ist natürliches (weißes) Licht (z.B. von der Sonne) unpolarisiert, d.h. dass der elektrische Feldvektor \vec{E} in keiner bevorzugten Schwingungsrichtung emittiert wird. Die möglichen Schwingungsrichtungen werden dabei in einer Statistisch gleichmäßig verteilten Wahrscheinlichkeit auf, die keine Richtung bevorzugt.

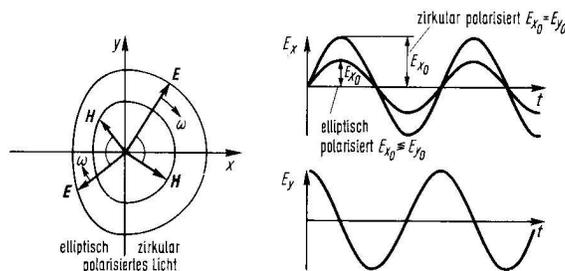
10.1.1 Linear polarisiertes Licht

Die Polarisation beschreibt die Orientierung des E -Feldvektors. Ist dessen Richtung über die gesamte Ausbreitungsstrecke die gleiche, so sprechen wir von linear polarisiertem Licht.



10.1.2 Zirkular bzw. elliptisch polarisiertes Licht

Bei zirkular bzw. elliptisch polarisiertem Licht beschreibt die Spitze des E -Vektors einen Kreis bzw. eine Ellipse um die Ausbreitungsachse der Welle. Diese kreisende Bewegung des Vektors kommt durch die Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen zustande, die senkrecht zueinander mit einer Phasendifferenz zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ schwingen. Ist der Phasenunterschied gerade $\frac{\pi}{2}$, so liegt zirkuläre Polarisation vor. Je nachdem, ob der E -Vektor im oder gegen den Uhrzeigersinn läuft, sprechen wir von links- oder rechtszirkular (-elliptisch) polarisiertem Licht.



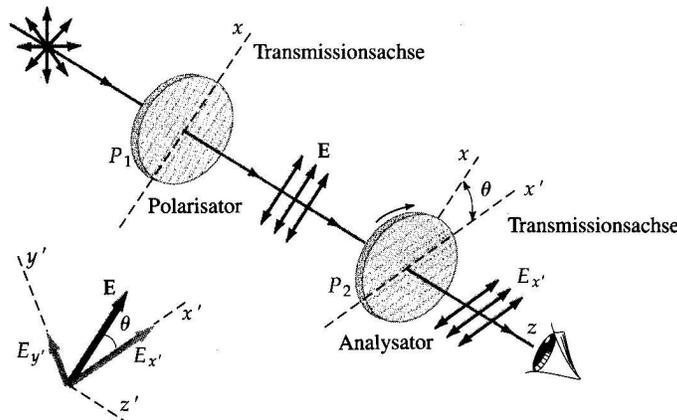
10.2 Erzeugung von polarisiertem Licht

Um aus natürlichem Licht polarisiertes Licht zu machen, werden sogenannte *Polarisatoren* verwendet. Diese funktionieren im allgemeinen so, dass sie einfach den in eine bestimmte Richtung gerichteten Anteil des E -Feldes wegnehmen, so dass anschließend die \vec{E} -Vektoren nur noch in einer Richtung schwingen. Daher kann man einen solchen Polarisator auch als *Analysator* verwenden, um die Polarisation des Lichtes nachzuweisen, da linear polarisiertes Licht vollständig verschwindet, wenn der Analysator gerade senkrecht zur Polarisationssebene des Lichtes steht. Dabei gilt für die durchgelassene Feldstärke $E_{x'}$ in Abhängigkeit des Winkels θ des Analysators zur Polarisationssebene

$$E_{x'} = E \cdot \cos \theta$$

und für die Intensität wegen $I \sim E^2$

$$I_{x'} = I \cdot \cos^2 \theta$$



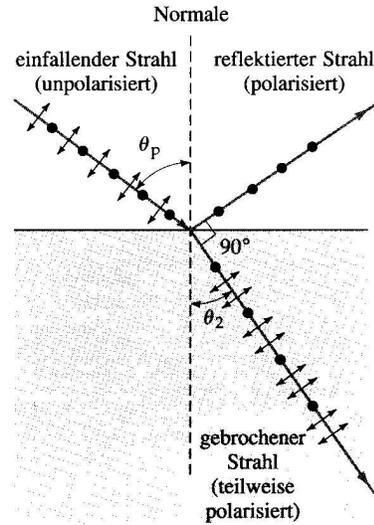
10.2.1 Erzeugung durch Polarisationsfilter

Polarisationsfilter sind Folien, in die lange Molekülketten parallel zueinander eingelagert sind. Der Anteil des E -Feldes, welcher parallel zu den Molekülketten einfällt bringt die Elektronen entlang der Molekülketten zum Schwingen, und wird dabei absorbiert. Der Feldanteil, der senkrecht zu den Ketten schwingt kann nicht absorbiert werden und wird daher durchgelassen. Diese Richtung wird daher *Transmissionsachse x* genannt.

10.2.2 Polarisation durch Reflexion

Trifft unpolarisiertes Licht unter einem Winkel θ zum Lot auf die Oberfläche einer Glasplatte, so wird ein Teil des Lichts reflektiert, während der Rest in das Medium hinein gebrochen wird. In der Oberfläche sind nach der Brechung noch alle Polarisationsrichtungen vorhanden. Wenn jetzt der reflektierte Lichtstrahl gerade senkrecht zu dem gebrochenen steht, so hat er keinen Anteil mehr, der in der Einfallsebene schwingt, da

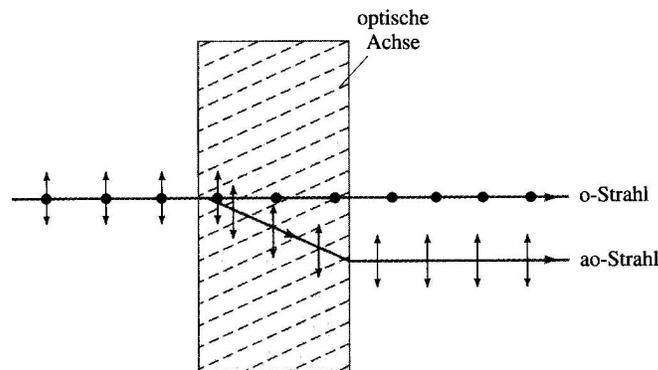
diese Schwingungsrichtung der entsprechenden Dipole gerade der Ausbreitungsrichtung des reflektierten Strahls entspricht. Somit ist der reflektierte Strahl senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert.



Der Winkel θ_P , unter dem der Lichtstrahl auf die Oberfläche treffen muss, damit gebrochener und reflektierter Strahl gerade senkrecht zueinander stehen wird *Brewsterwinkel* genannt. Für ihn gilt abhängig vom Brechungsindex des Glases

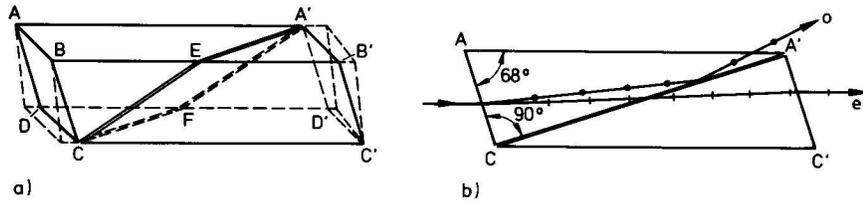
$$\theta_P = \arctan n$$

10.2.3 Polarisation durch Doppelbrechung



Manche Kristalle, z.B. Kalkspat, sind optisch anisotrop. In ihnen ist aufgrund ihrer Symmetrie die Lichtgeschwindigkeit Richtungsabhängig. Der Lichtstrahl wird bei Eintritt in zwei Teile aufgespaltet: In den ordentlichen Strahl c_o und außerordentlichen Strahl c_e . Beide sind senkrecht zueinander polarisiert. In dem doppelbrechendem Material gibt es eine bevorzugte Richtung, in der sich beide Strahlen mit der gleichen Geschwindigkeit

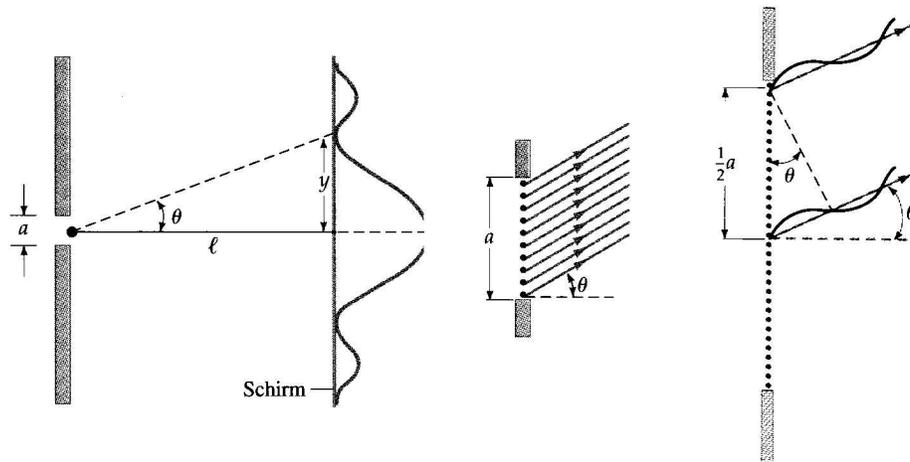
ausbreiten. Diese Richtung wird optische Achse genannt. Strahlt man nun unpolarisiertes Licht unter einem von der optischen Achse verschiedenen Winkel ein, laufen die Strahlen in verschiedene Richtungen: Der ordentliche Strahl läuft ungebrochen durch den Kristall. Der außerordentliche wird trotz senkrechten Einfall abgelenkt. Dieser Effekt wird als Doppelbrechung bezeichnet. Überlagert man die Strahlen (senkrecht zueinander polarisiert), so erhält man eine zirkular polarisierte Welle, wenn die beiden Wellenlängen genau $\frac{\pi}{2}$ zueinander Phasenverschoben sind. Die Phasendifferenz kann man durch geeignete Dicke des Plättchens einstellen. Somit kann man aus natürlichem Licht zirkular polarisiertes Licht erzeugen. Das entspricht einer Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$. Deshalb nennt man dieses Plättchen auch $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen



Um linear polarisiertes Licht zu erhalten, muss einer der Strahlen ausgeblendet werden. Dies geschieht im sogenannten *Nicol-Prisma*. Das Nicol-Prisma ist ein länglicher Kalkspat-Einkristall, mit glattgeschliffenen und natürlichen Oberflächen, der diagonal zersägt und anschließend wieder zusammengeklebt wird. Der Kleber muss dabei eine größere Brechzahl als der Kristall haben. Somit fällt der ordentliche Strahl in den Bereich der Totalreflexion und wird entfernt. Der außerordentliche Strahl dagegen, durchdringt die Trennfläche und verlässt das Prisma als linear polarisiertes Licht.

10.3 Fraunhofer-Beugung am Einzelspalt

Wird ein schmaler Spalt mit von Licht durchleuchtet, so sehen wir auf einem Schirm hinter dem Spalt nicht dessen geometrisches Abbild, sondern eine regelmäßige Verteilung von Intensitätsmaxima und -minima, eine sogenannte *Beugungsfigur*. Spricht man von Fraunhofer-Beugung, so ist gemeint, dass sowohl Lichtquelle als auch Schirm in unendlicher Entfernung vom Spalt stehen, so dass die Lichtstrahlen parallel zueinander sind. Um dies in der Praxis annähernd zu erreichen, müssen die Abstände sehr groß gegenüber der Spaltbreite sein.



Aus großer Entfernung scheint vom Spalt eine ebene Welle auszugehen. Diese ist nach dem Prinzip von Huygens die Summe der von allen Punkten des Spalts ausgehenden Kugelwellen. Die Stärke des \vec{E} -Feldes der unter dem Winkel θ ausgesandten Welle ist daher gleich der Summe der Feldstärken der vom Spalt ausgehenden Teilwellen. Um auf dem Schirm ein Minimum (Dunkelheit) zu erhalten, müssen sich die Elementarwellen gerade paarweise auslöschen. Dazu betrachten wir immer zwei Elementarwellen im Abstand $\frac{a}{2}$ zueinander. Hier gilt für die optische Wegdifferenz gerade

$$\Delta s = \frac{a}{2} \sin \theta$$

wobei Auslöschung gerade im Fall $\Delta s = k \cdot \frac{\lambda}{2}$ eintritt. Wir erhalten also ein Minimum für den Fall

$$\frac{a}{2} \sin \theta = k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

oder

$$\sin \theta = \frac{k \cdot \lambda}{a}$$

Steht der Schirm nun im Abstand l zum Spalt, und haben die Minima den Abstand y zum Hauptmaximum in der Mitte der Beugungsfigur, so gilt für den Winkel θ

$$\tan \theta = \frac{y}{l}$$

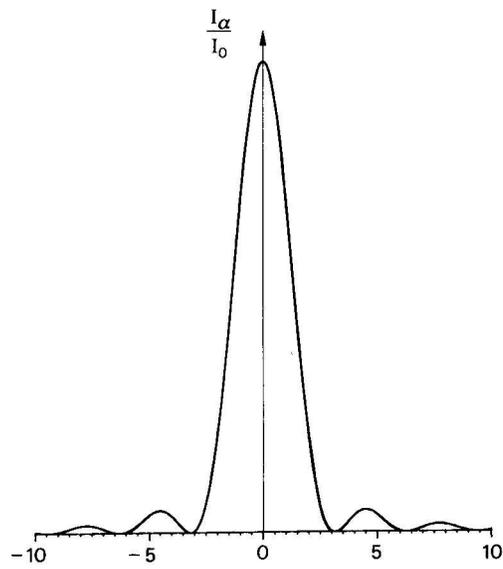
Wobei wir hier die Kleinwinkel-Näherung

$$\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$$

verwenden, weshalb für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{a \cdot y}{n \cdot l}$$

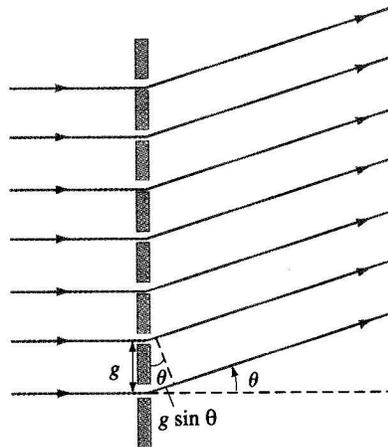
gilt, wenn n die Nummer des Minimums, ausgehend vom Hauptmaximum ist.



Intensitätsverteilung bei der Beugung am Einzelspalt.

10.4 Fraunhofer-Beugung am Strichgitter

Die Versuchsanordnung ist im Wesentlichen die der Beugung am Spalt mit dem Unterschied, dass anstatt des Einzelspalts ein Strichgitter verwendet wird.



Die Beugungsfigur lässt hier sehr scharfe Maxima erkennen, weshalb wir hier diese anstatt der Minima betrachten. Damit sich die Teilwellen der einzelnen Gitterspalte gerade zu einem Maximum überlagern, muss ihre optische Wegdifferenz Δs gerade ein Vielfaches der Wellenlänge λ sein. Dabei gilt

$$\Delta s = \frac{1}{g} \sin \theta$$

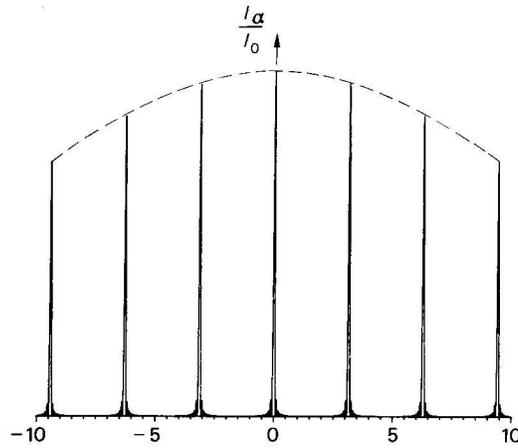
wenn g die Gitterkonstante (Anzahl der Spalte pro Breitereinheit) ist. Insgesamt ist also die Bedingung für ein Maximum

$$\sin \theta = n \cdot \lambda \cdot g$$

Nehmen wir wieder die Bezeichnungen für die geometrische Anordnung von oben (aber y jetzt Abstand der Maxima) und lassen die Kleinwinkel-Näherung gelten, so erhalten wir nun für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{y}{ngl}$$

wenn n die Nummer des Maximums, ausgehend vom Hauptmaximum ($n = 0$) ist.



Intensitätsverteilung bei der Beugung am Strichgitter.

10.5 Mathematische Berechnung der Beugungsfigur mit Hilfe der Fourier-Transformation

Zur mathematischen Beschreibung der Beugungsfigur betrachten wir die Fouriertransformierte der Amplitudenverteilung des Lichts in der beugenden Öffnung:

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = u(\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy$$

Die Amplitudenverteilung eines einfallenden kohärenten Lichtes (Wellenlänge λ) in einer beugenden Öffnung wird durch die Funktion $f(x, y)$ beschrieben. Für geringe Winkelabweichungen von der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung ist im Fernfeld die Amplitudenverteilung $u(x_0, y_0)$ im Abstand z_0 von der Öffnung proportional der Fourier-Transformation $\mathcal{F}\{f(x, y)\}$ mit den Raumfrequenzen $\nu = \frac{x_0}{\lambda r_0}$ und $\mu = \frac{y_0}{\lambda r_0}$.

$$(r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2})$$

Für den Einzelspalt unendlicher Höhe mit der Breite b gilt

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \frac{b}{2} \\ 1 & \text{für } |x| \leq \frac{b}{2} \end{cases}$$

also erhalten wir für das Integral

$$u(\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy$$

oder, wenn man nach den Variablen trennt

$$\begin{aligned} u(\nu, \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\mu y} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i2\pi\nu x} dx = \delta(\mu) \cdot \left[-\frac{1}{2i\pi\nu} \cdot e^{-i2\pi\nu x} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\ &= \delta(\mu) \cdot \frac{1}{2i\pi\nu} \cdot \left(e^{i2\pi\nu\frac{b}{2}} - e^{-i2\pi\nu\frac{b}{2}} \right) = \delta(\mu) \cdot \frac{1}{2i\pi\nu} \cdot 2i \sin\left(2\pi\nu\frac{b}{2}\right) \\ &= b \cdot \delta(\mu) \cdot \frac{\sin(\pi\nu b)}{\pi\nu b} = b \cdot \delta(\mu) \cdot \text{si}(\pi\nu b) \end{aligned}$$

Uns interessiert hier nur der eindimensionale Fall, so dass wir

$$u(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu b)}{\pi\nu}$$

erhalten. Somit gilt für die Intensität, welche proportional zum Quadrat der Amplitude ist:

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(\pi\nu b)}{\pi\nu} \right)^2$$

10.5.1 Vergleich mit der zeitlichen Fourier-Transformation

Eine Funktion einer zeitlich veränderlichen wird durch die Fourier-Transformation in den Frequenzbereich, also ihren reziproken Raum abgebildet ($t \mapsto \frac{1}{t}$). Das selbe gilt bei der hier verwendeten Fourier-Transformation: Die Raumvariablen werden in ihren reziproken Raum in Variablen der *Raumfrequenz* abgebildet.

11 Michelson Interferometer

11.1 Licht als elektromagnetische Welle

Licht kann sowohl durch das Verhalten von Teilchen, wie auch durch Welleneigenschaften beschrieben werden. Das kommt immer darauf an, welche Eigenschaft von Licht gerade betrachtet werden soll. Für das Verhalten des Lichts in unserem Versuch ist es sinnvoll, das Licht als eine elektromagnetische Welle, die Lösung einer Wellengleichung ist, zu betrachten.

11.1.1 Die Wellengleichung

Um auf die Wellengleichungen für Licht zu kommen gehen wir von den *Maxwellschen Gleichungen* aus, welche folgendermaßen lauten:

- $\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$
d.h.: Ladungen ρ sind die Quellen und Senken der dielektrischen Verschiebung \vec{D} , also beginnen und enden alle elektrischen Feldlinien an den Ladungen.
- $\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$
d.h.: Die magnetische Induktion \vec{B} ist quellenfrei, es gibt also keine magnetischen Ladungen (Monopole).
- $\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
d.h.: Eine zeitlich veränderliche magnetische Induktion \vec{B} erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld \vec{E} .
- $\operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j}$
d.h.: Ein magnetisches Wirbelfeld \vec{H} entsteht durch die zeitliche Veränderung der elektrischen Verschiebungsdichte \vec{D} oder durch eine Stromdichte \vec{j} .

Hier wollen wir nur einen Spezialfall betrachten: Im Vakuum sind Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} Null und es gilt außerdem $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Diese Beziehungen setzen wir in die vierte Gleichung ein und erhalten

$$\nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Wir wenden nun auf die dritte Gleichung die Rotation an und erhalten dadurch

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

wobei $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ gilt, also

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

Setzen wir für $\nabla \times \vec{B}$ die modifizierte vierte Gleichung ein, so ergibt sich also

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

und weil $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ mit $\rho = 0$ gilt, erhalten wir die allgemeine Form der Wellengleichung für das elektrische Feld im Vakuum zu

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

und es ergibt sich damit für die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Eine mögliche Lösung für diese Gleichung ist eine ebene harmonische Welle

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

wobei $\omega = c_0 k$ gilt und \vec{k} in die Ausbreitungsrichtung des Lichts zeigt. Im für uns relevanten eindimensionalen Fall können wir den Laplace-Operator Δ in der Wellengleichung durch $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ersetzen und erhalten damit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

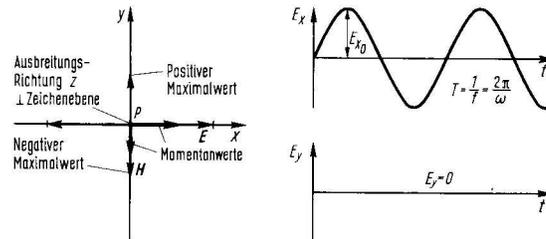
Dadurch verändert sich dann die Lösung der Gleichung zu

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$

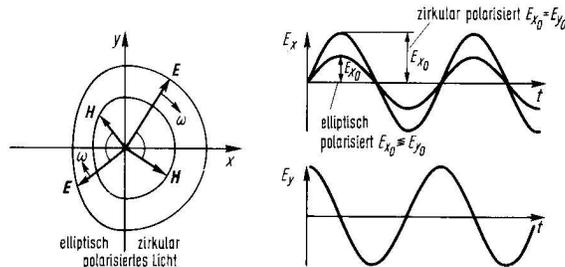
In jedem Fall gilt, dass die Vektoren des \vec{E} - und \vec{B} -Feldes, sowie der Wellenvektor \vec{k} im Vakuum alle senkrecht zueinander orientiert sind.

11.1.2 Polarisation von Licht

Die Polarisation beschreibt die Orientierung des E -Feldvektors. Ist dessen Richtung über die gesamte Ausbreitungsstrecke die gleiche, so sprechen wir von linear polarisiertem Licht.



Bei zirkular bzw. elliptisch polarisiertem Licht beschreibt die Spitze des E -Vektors einen Kreis bzw. eine Ellipse um die Ausbreitungsachse der Welle.



11.2 Die Intensität des Lichts

Die Intensität einer elektromagnetischen Welle errechnet sich aus dem Produkt der mittleren Energiedichte mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Für die Energiedichte des elektrischen bzw. des magnetischen Feldes gilt

$$w_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

bzw.

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Da im Vakuum für eine Welle $E = c_0 B$ gilt, verändert sich die Gleichung für die Energiedichte des Magnetfeldes ebenfalls zu

$$w_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

ist also gleich der Energiedichte des elektrischen Feldes. Die gesamte Energiedichte errechnet sich aus der Summe der beiden Energiedichten also zu

$$w = w_E + w_B = \varepsilon_0 E^2 = \frac{E \cdot B}{\mu_0 c_0}$$

Für die momentane Intensität der elektromagnetischen Welle erhalten wir also

$$I_{\text{momentan}} = w c_0 = \frac{E \cdot B}{\mu_0}$$

11.2.1 Der Poyntingvektor

Die oben genannte Gleichung gilt, da der E - und der B -Feldvektor senkrecht aufeinander stehen. Allgemeingültiger ist

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Dieser Vektor \vec{S} wird als *Poyntingvektor* oder Vektor der Energiestromdichte bezeichnet. Bei einer elektromagnetischen Welle, wo E - und B -Feldvektor senkrecht aufeinander stehen, beschreibt er die Ausbreitungsrichtung und betragsmäßig die momentane Intensität der Welle.

11.2.2 Die Intensität der Welle

Da unser Auge oder ein Detektor die schnelle Lichtoszillation (im Bereich von etwa 10^{14} Hz) nicht erfassen kann, macht es keinen Sinn die momentane Intensität einer Lichtwelle anzugeben. Daher wird als die Intensität des Lichtes der Betrag der zeitlichen Mittelung des Poyntingvektors definiert, was proportional zum elektrischen Feld der Gesamtwelle im Quadrat ist.

$$I = \left\langle |\vec{S}| \right\rangle_t \sim \vec{E}_{\text{ges}}^2 \quad , \quad \vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

11.3 Interferenz

Unter Interferenz versteht man die ungestörte Überlagerung von zwei oder mehr Wellenzügen, wobei sich die resultierende Intensität nicht aus der Summe der beiden Einzelintensitäten ergibt. Dies rührt daher, dass (wie oben erläutert) gilt

$$I_{\text{ges}} \sim E_{\text{ges}}^2$$

wobei $E_{\text{ges}}^2 = E_1 + E_2$ mit $E_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$ ist. Damit erhalten wir also eine Gesamtintensität von

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_t$$

also abhängig von der zum optischen Wegunterschied der Wellenzüge proportionalen Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \sim \Delta s$.

Wir unterscheiden zwischen konstruktiver Interferenz, welche auftritt, wenn die Phasendifferenz gerade $\Delta\varphi = k \cdot 2\pi$ ist, da sich die Wellenamplituden dann gerade addieren und destruktiver Interferenz bei einer Phasendifferenz von $\Delta\varphi = (2k + 1) \cdot \pi$, da sich die Amplituden dann gegenseitig abschwächen (bei $A_1 = A_2$ sogar gegenseitig auslöschen).

11.3.1 Voraussetzungen für Interferenz

Damit Interferenz überhaupt auftreten kann, dürfen die sich überlagernden Wellenzüge nicht senkrecht zueinander polarisiert sein, da die beiden E -Felder sonst keinen Einfluss aufeinander haben. Außerdem müssen beide Wellenzüge *kohärent* sein, d.h. dass sie eine genau definierte Phasendifferenz besitzen, welche sich nicht oder zumindest um weniger als 2π verändert. Hieraus ergibt sich folgerichtig, dass die Wellenzüge von exakt der gleichen Frequenz sein müssen. Außerdem ist Kohärenz nur möglich, wenn beide Wellenzüge aus der gleichen Quelle stammen, da sie sonst keinerlei Bezug zueinander haben. Wir unterscheiden zwischen zwei Arten von Kohärenz, die beide erfüllt sein müssen:

Zeitliche Kohärenz Zeitliche Kohärenz bedeutet, dass sich die Phasendifferenz zwischen den beiden sich an einem Ort überlagernden Wellenzügen während der Beobachtungsdauer zeitlich nicht oder zumindest um weniger als 2π ändert. Die maximale Zeit, in der diese feste Phasenbeziehung gilt, heißt *Kohärenzzeit* τ und ist ein Maß für die mittlere Lebensdauer eines angeregten Elektronenzustandes und somit für die Aussendungsdauer des Wellenzuges. Dabei gilt $\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$ mit der spektralen Breite $\Delta\nu$ des Wellenzuges. Die Strecke, die das Licht in dieser Zeit zurücklegt, nennen wir *Kohärenzlänge*. Sie ist ein Maß für die Länge des ausgesandten Wellenzuges. Daraus erschließt sich, dass es nur zur Interferenz kommen kann, wenn die optische Wegdifferenz Δs kleiner als die Kohärenzlänge L ist, da ansonsten die zueinander kohärenten Wellenzüge sich nicht mehr treffen und somit auch nicht miteinander interferieren können. Klassische Lichtquellen, sogenannte *Weißlichtquellen* (Glühlampen, Sonnenlicht), senden nur sehr kurze Wellenzüge aus, so dass der optische Wegunterschied ebenfalls nur sehr kurz sein darf, damit es noch zu Interferenzerscheinungen kommt, da nachfolgende Wellenzüge keine definierte, sondern nur eine statistische Phasenbeziehung zueinander haben. Das

Licht von Spektrallampen mit kleiner spektraler Breite oder besser noch Laserlicht (nur eine Wellenlänge vorhanden) hat dagegen eine sehr viel größere Kohärenzlänge und kann daher sehr gut für Interferenzexperimente genutzt werden. Zum Vergleich einige typische Kohärenzlängen verschiedener Lichtquellen:

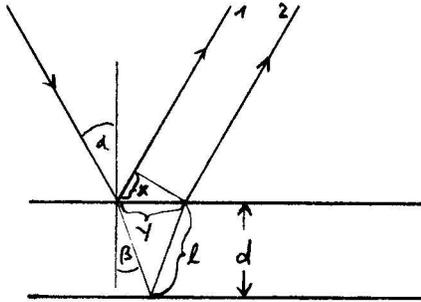
- Klassische Lichtquelle (Glühbirne, Weißlicht): $L \approx 1\mu\text{m}$
- Spektrallampe (z.B. Na-Dampflampe): $L \approx 1\text{cm} - 1\text{m}$
- Laser: L im Bereich von Kilometern

Räumliche Kohärenz Ändert sich die Phasendifferenz eines Wellenfeldes an zwei verschiedenen Orten während der Beobachtungsdauer nicht oder zumindest nicht mehr als um 2π , so sprechen wir von räumlicher Kohärenz. Diese spielt bei ausgedehnten Lichtquellen eine Rolle und ist bei unserem Versuch erfüllt, da für die Ausdehnung der Lichtquelle a und den halben Öffnungswinkel u gilt:

$$2a \sin u \ll \lambda$$

11.3.2 Interferenz gleicher Neigung

Unter Interferenz gleicher Neigung versteht man kreisförmige Interferenzerscheinungen (Haidingersche Ringe), die entstehen, wenn Lichtstrahlen einer divergenten Lichtquelle kegelmantelartig auf eine planparallele durchsichtige Platte (z.B. Glas) fallen, da die optische Wegdifferenz nur vom Einfallswinkel α abhängig ist. Daher erfüllen alle unter dem gleichen Winkel (kegelmantelartig) einfallenden Strahlen die gleiche Interferenzbedingung und es ergeben sich konzentrische Interferenzringe.



Der erste Lichtstrahl wird direkt reflektiert und erfährt dabei einen Phasensprung von π (durch Reflexion am optisch dichteren Medium). Der andere Strahl muss zusätzlich den Weg durch die Glasplatte zurücklegen. Dieser ist bei einer Dicke der Platte von d genau $2l = \frac{2d}{\cos \beta}$. Da sich das Licht in dem optisch dichteren Medium um den Faktor n langsamer ausbreitet, kommt es als Faktor zum optischen Gangunterschied hinzu. Der erste Lichtstrahl muss zusätzlich noch den Weg $x = y \sin \alpha = 2l \sin \beta \sin \alpha = 2d \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta}$ zurücklegen. Damit beträgt der optische Gangunterschied also

$$\Delta s = \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} + \frac{\lambda}{2} = \frac{2d}{\cos \beta} (n - \sin \beta \sin \alpha) + \frac{\lambda}{2}$$

wobei der Term $\lambda/2$ von dem Phasensprung kommt. Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$$

außerdem gilt auch

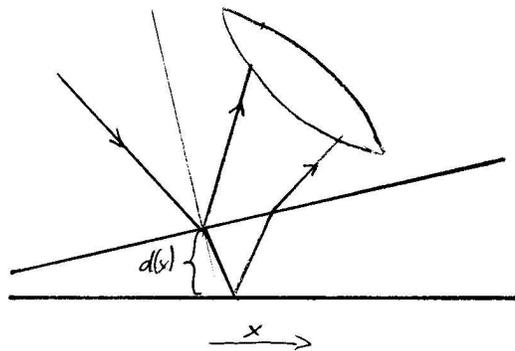
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\Delta s = 2dn \sqrt{\frac{1}{n^2 - \sin^2 \alpha}} \cdot \frac{n^2 - \sin^2 \alpha}{n} + \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}$$

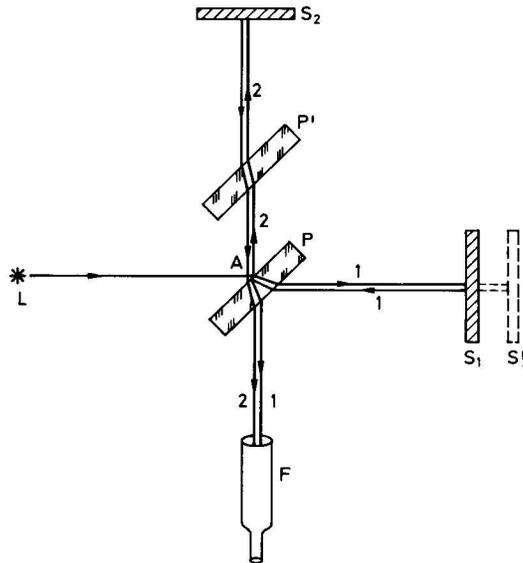
Hier kann man also erkennen, dass die Interferenzbedingung ausschließlich vom Einfallswinkel α abhängt.

11.3.3 Interferenz gleicher Dicke



Interferenz gleicher Dicke beruht auf dem gleichen Prinzip, wie die Interferenz gleicher Neigung, jedoch mit dem Unterschied, dass hier z.B. paralleles Licht auf einen Keil fällt. Somit ist der Einfallswinkel α immer gleich. Hier ändert sich in der Formel also die Dicke des Mediums. Daher erfüllen alle Strahlen, die auf der gleichen Höhe einfallen die gleiche Interferenzbedingung und es ergibt sich ein Streifenmuster.

11.4 Das Michelson-Interferometer



Von der Lichtquelle L fällt das Licht auf eine um 45° verdrehte, halbdurchlässig verspiegelte Glasplatte P , wobei es in einen durchgehenden (1) und einen senkrecht dazu verlaufenden (2) Strahl zerlegt wird. Beide Strahlen werden von senkrecht gestellten Spiegeln in sich selbst reflektiert und treffen auf ihrem Rückweg erneut auf die Platte, wobei sie wieder jeweils in zwei senkrechte Strahlen zerlegt werden. Von diesen betrachten wir nur die beiden Strahlen, welche miteinander koinzidierend in das Fernrohr F (zum Betrachter) gelangen. Da der Strahl 1 die Platte P dabei dreimal passiert, Strahl 2 hingegen nur einmal, ist in den Weg von Strahl 2 noch zusätzlich eine zweite, gleich dicke, aber unverspiegelte Platte P' parallel zu P eingeschoben. Damit sind die Lichtwege der beiden Teilstrahlen zunächst vollkommen gleichwertig. Da aber einer der beiden Spiegel entlang der Licht-Achse verstellbar ist, kann man damit einen optischen Wegunterschied zwischen den beiden Strahlen erzeugen, und es ergeben sich Interferenzerscheinungen. Diese sind als konzentrische Interferenzringe zu beobachten, da sie auf dem Prinzip der Interferenz gleicher Neigung beruhen: Denken wir uns den Spiegel 2 heruntergeklappt hinter dem Spiegel 1, wie in der Zeichnung angedeutet (S'_2), so können wir das Modell der planparallelen Platte (s. oben) verwenden, allerdings dass das Medium dabei Luft ist und somit in der Formel $n = 1$ gilt. Außerdem fällt hier der Phasensprung weg, weshalb wir auf folgende Beziehung kommen:

$$\Delta s = 2d \cos \alpha = 2\Delta x \cos \alpha$$

wobei Δx gerade der Weg ist, um den der zweite Spiegel verschoben ist. Somit gilt beim Interferometer für die konstruktive Interferenz

$$\Delta s = 2\Delta x \cos \alpha = m\lambda$$

bzw. für die destruktive Interferenz

$$\Delta s = 2\Delta x \cos \alpha = \frac{2m + 1}{2} \lambda$$

Im Versuch wird das Zentrum der Haidingerschen Ringe betrachtet ($\alpha = 0$), weshalb der Faktor $\cos \alpha = 1$ ist und somit rausfällt.

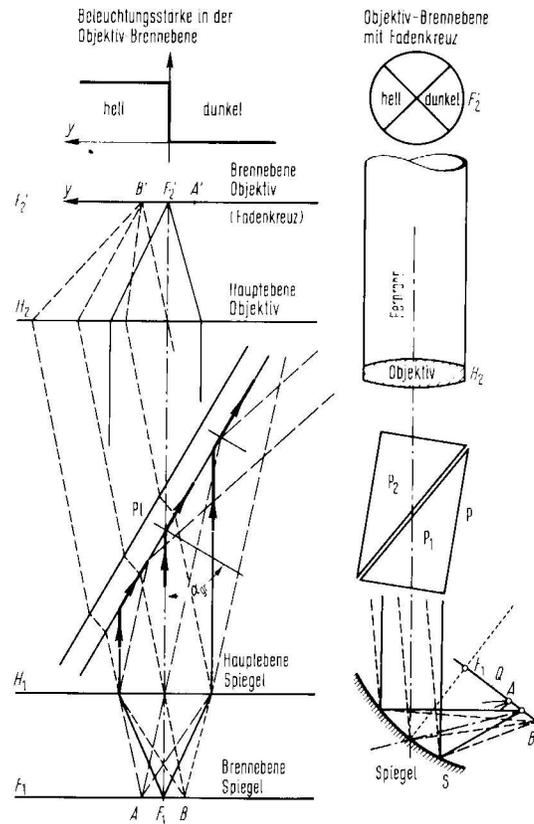
11.4.1 Bestimmung von Wellenlängen mit dem Michelson-Interferometer

Wird der Spiegel 2 kontinuierlich verschoben, so ändert sich das Zentrum der Ringe ständig von Hell nach Dunkel und umgekehrt, da sich Δx kontinuierlich verändert. Um dabei von einem Maximum (bzw. Minimum) der Intensität zum nächsten zu gelangen, muss der Spiegel um $\Delta x = \lambda/2$ verschoben werden. Zählt man also, während man den Spiegel verschiebt, die Anzahl N der auftretenden Maxima (bzw. Minima) ab, so hat man dabei den Spiegel um $\Delta x = N \cdot \lambda/2$ verschoben. Da die Spiegelverschiebung Δx abgelesen werden kann, lässt sich daraus nun die Wellenlänge des Lichts berechnen:

$$\lambda = \frac{2\Delta x}{N}$$

11.5 Das Abbe-Refraktometer

Mit dem Abbe-Refraktometer lässt sich die Brechzahl eines durchsichtigen Mediums bestimmen.



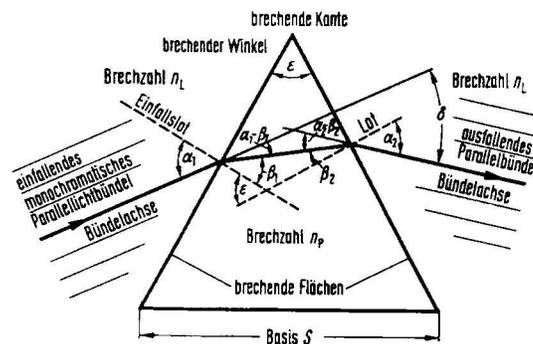
Das Abbe-Refraktometer beruht auf dem Prinzip der Totalreflexion: Man bringt das zu untersuchende Medium zwischen zwei gegeneinander angeordnete Prismen, deren Brechungsindex höher sein muss als der Brechungsindex des zu untersuchenden Mediums (Daher wird hier Flintglas mit einer Brechzahl von $n \approx 1,9$ verwendet). Nun wird Licht über einen Hohlspiegel parallelisiert und in die Prismen gelenkt. Das nun einfallende Licht wird an den Grenzschichten zwischen den Prismen und dem zu untersuchenden Medium gebrochen. Dabei tritt beim Übergang von dem zu untersuchenden Medium zum zweiten Prisma (dessen Brechzahl höher ist) ab einem bestimmten Einfallswinkel Totalreflexion auf, und der entsprechende Lichtstrahl erreicht das Objektiv nicht. Dreht man nun die gesamte Anordnung, so kann man diesen (von der Brechzahl des zu untersuchenden Mediums abhängigen) Winkel ermitteln. Im Okular des Refraktometers lässt sich über eine abgleichende Optik, die den gemessenen Winkel umrechnet, die Brechzahl des Prüfstücks direkt ablesen.

12 Spektrometer

12.1 Das Prisma

Ein optisches Prisma ist ein Körper aus einer Lichtbrechenden Substanz der Brechzahl n_p , welcher von zwei nicht parallelen Flächen begrenzt wird. Die Gerade, in der sich die zwei Flächen schneiden, heißt *brechende Kante*. Ein *Hauptschnitt* ist ein Schnitt, auf dem die brechende Kante als Normale steht. Der *brechende Winkel* ist der Winkel zwischen den zwei Flächen ε .

12.1.1 Ablenkung eines Lichtstrahles durch ein optisches Prisma



Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt an den Grenzflächen:

$$n_{\text{Luft}} \sin \alpha_1 = n_p \sin \beta_1 \quad \text{und} \quad n_{\text{Luft}} \sin \alpha_2 = n_p \sin \beta_2$$

Die totale Ablenkung, die das Bündel erfährt ergibt sich aus der Grafik zu:

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon$$

Die Ablenkung hängt vom Einfallswinkel α_1 , vom brechenden Winkel ε , sowie vom Verhältnis $n = \frac{n_p}{n_{\text{Luft}}}$ ab, was allerdings nur bei fester Wellenlänge λ gilt.

Herleitung:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \arcsin(n \sin \beta_2) = \arcsin[n \sin(\varepsilon - \beta_1)] \\ &= \arcsin[n(\sin \varepsilon \cos \beta_1 - \cos \varepsilon \sin \beta_1)] \\ &= \arcsin\left[n\left(\sin \varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 \beta_1} - \cos \varepsilon \frac{1}{n} \sin \alpha_1\right)\right] \\ &= \arcsin\left[n\left(\sin \varepsilon \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \alpha_1} - \cos \varepsilon \frac{1}{n} \sin \alpha_1\right)\right] \\ &= \arcsin\left(\sin \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \varepsilon \sin \alpha_1\right) \end{aligned}$$

also:

$$\delta(1, \varepsilon, n) = \alpha_1 - \varepsilon + \arcsin \left[\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} \sin \varepsilon - \sin \alpha_1 \cos \varepsilon \right]$$

Bei gegebenem Prisma nimmt δ ein Minimum an, und zwar genau dann, wenn das Prisma symmetrisch vom Licht durchsetzt wird. Das heißt, das Lichtbündel tritt senkrecht durch eine Ebene, welche den brechenden Winkel ε halbiert. In diesem Fall gelten folgende Beziehungen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2} = \alpha_{\min}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\varepsilon}{2} = \beta_{\min}$$

also (Fraunhofersche Formel):

$$n = \frac{\sin \alpha_{\min}}{\sin \beta_{\min}} = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$$

Mit dieser Formel kann nun auf einfache Weise die Brechzahl eines Prismas bestimmt werden.

12.1.2 Winkeldispersion

Beim Durchgang eines „weißen“ Parallellichtbündels durch ein optisches Prisma tritt eine *spektrale Zerlegung* auf. Diese *Winkeldispersion* ergibt sich aus der Tatsache, dass das Prismenmaterial für unterschiedliche Wellenlängen auch verschiedene Brechzahlen besitzt, so wird bei „normaler Dispersion“ ($\frac{dn}{d\lambda} < 0$), welche beim Durchgang des sichtbaren Lichts durch ein optisches Prisma vorliegt, Licht mit kleiner Wellenlänge stärker gebrochen. Mathematisch lässt sich die Winkeldispersion folgendermaßen beschreiben:

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \left(\frac{\partial \delta}{\partial n} \right)_{\varepsilon, \alpha_1} \frac{dn}{d\lambda}$$

Dabei ergibt sich der Differentialquotient $\left(\frac{\partial \delta}{\partial n} \right)_{\varepsilon, \alpha_1}$ aus der partiellen Ableitung des im vorigen Abschnitt hergeleiteten $\delta(\alpha_1, \varepsilon, n)$ nach n , wofür sich beim symmetrischen Durchgang folgendes ergibt:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial n} \right)_{\varepsilon, \alpha_{\min}} = \frac{2}{n} \tan \left(\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2} \right) = \frac{2}{n} \tan \alpha_{\min}$$

Der zweite Faktor $\frac{dn}{d\lambda}$ ist eine vom Prismenmaterial abhängige Funktion der Wellenlänge.

12.2 Das Auflösungsvermögen

Mit dem Spektrometer sollen auch sehr dicht aufeinander liegende Spektrallinien noch getrennt werden können. Daher ist es erforderlich, dass das Spektroskop über ein ausreichendes Auflösungsvermögen verfügt und somit auch noch Spektrallinien mit nur kleinen Winkeldifferenzen zu trennen sind.

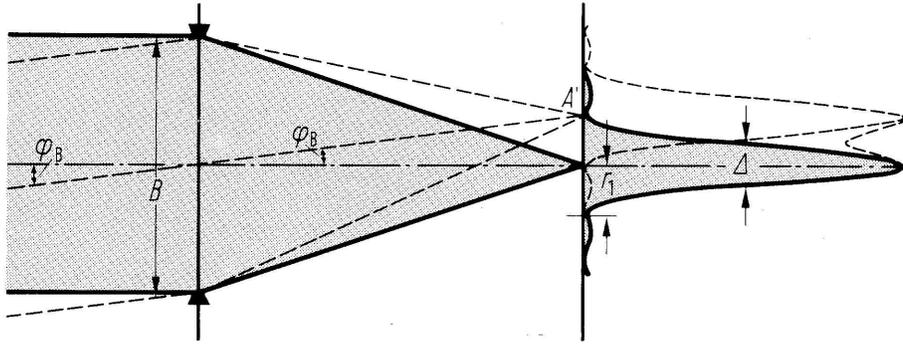
Wenn wir nun zwei Spektrallinien betrachten, die gerade noch getrennt wahrgenommen werden, so ergibt sich das theoretische Auflösungsvermögen A aus der mittleren Wellenlänge λ und der Differenz der beiden Wellenlängen $\Delta\lambda$:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Licht der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird im Prisma nach 1.2 um den Winkel

$$d\delta = d\lambda \left(\frac{\partial\delta}{\partial n} \right) \frac{dn}{d\lambda}$$

weniger abgelenkt.



Da das austretende Lichtbündel durch den Objektivrand begrenzt wird, treten in der Brennebene des Fernrohrs Beugungserscheinungen auf. In dem Bild erkennt man, dass ab einem gewissen Winkel zwei Spektrallinien aufgrund der Überlagerung ihrer Beugungsfiguren nicht mehr getrennt wahrgenommen werden können. Ab welchem Winkel dies eintritt ist eine subjektive Angelegenheit. Um dies zu vereinheitlichen benutzt man im Allgemeinen das Rayleigh-Kriterium, welches aussagt, dass zwei Beugungsfiguren gerade noch getrennt werden können, wenn das Hauptmaximum der einen mit dem ersten Minimum der anderen zusammenfällt, also der Winkel $d\delta$ gerade dem Beugungswinkel φ_B entspricht. Hat der Objektivrand den Durchmesser B , so gilt nach dem Rayleigh-Kriterium:

$$1,22 \frac{\lambda}{B} = \tan \varphi_B \approx \varphi_B$$

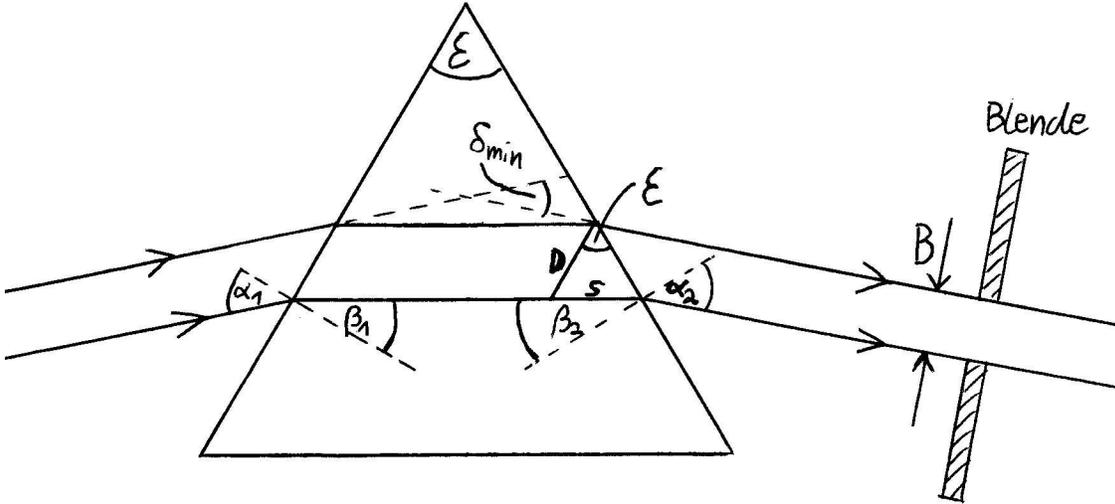
Aus den obigen Gleichungen und $d\delta = \varphi_B$ ergibt sich

$$d\lambda \left(\frac{\partial\delta}{\partial n} \right) \frac{dn}{d\lambda} = 1,22 \frac{\lambda}{B}$$

wobei der Faktor 1,22 von der Beugung an der kreisrunden Öffnung kommt. Wird das Bündel jedoch von einem langen dünnen Spalt begrenzt, so reduziert sich der Faktor auf 1. Um die Berechnungen zu vereinheitlichen wird gewöhnlich auch bei kreisrunder Bündelbegrenzung der Faktor 1 verwendet. Es gilt also

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B \left(\frac{\partial\delta}{\partial n} \right) \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

wobei hier die Betragsstriche stehen, um eine positive Größe zu erhalten, da $\frac{dn}{d\lambda}$ im Bereich normaler Dispersion negativ ist.



Verwendet man δ aus 1.2.1, so erhält man

$$A = B \frac{\sin \varepsilon}{\cos \alpha_2 \cos \beta_1} \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

und daraus mit $B = D \cos \alpha_2$

$$A = D \frac{\sin \varepsilon}{\cos \beta_1} \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

Wenn wir jetzt noch die Bedingung für symmetrischen Durchgang $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ erhalten wir also im Minimum der Ablenkung

$$A = 2D \sin \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

Außerdem ersehen wir aus der Zeichnung für die ausgenutzte Basisbreite $S = 2D \sin \frac{\varepsilon}{2}$, also gilt ebenfalls

$$A = S \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

Das Auflösungsvermögen hängt also ausschließlich von der ausgenutzten Basisbreite des Prismas, sowie von dessen Material ab.

Bei dem Versuch wird nicht D gemessen, sondern die Spaltbreite B . Wir setzen also wieder $B = D \cos \alpha_2$ und außerdem $\alpha_2 = \frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}$ ein und erhalten schließlich

$$A = 2B \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}} \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

13 Temperaturstrahlung

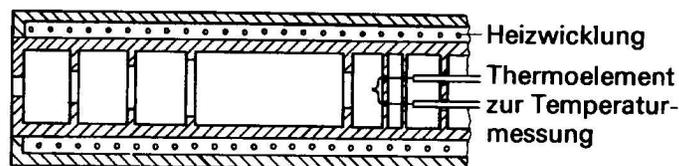
13.1 Was ist Wärmestrahlung

Erfahrungsgemäß strahlen sehr heiße Körper (wie z.B. glühendes Metall) Licht aus. Doch auch wenn der Körper nicht glüht, so emittiert er trotzdem optische (elektromagnetische) Strahlung, allerdings verschiebt sich die Wellenlänge mit sinkender Temperatur nach oben in einen Bereich außerhalb des sichtbaren Lichts. Hier sprechen wir von *Wärmestrahlung* oder auch *Temperaturstrahlung*.

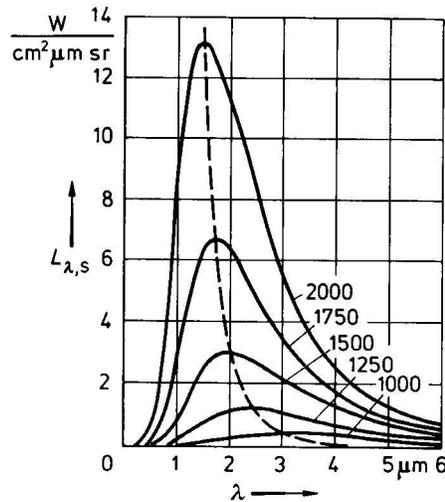
Wird Wärmestrahlung von einem Körper absorbiert, so werden dabei Elektronen im Körper angeregt. Fallen diese danach wieder auf ihr voriges Niveau zurück, so wird wieder optische Strahlung emittiert. Die Fähigkeit eines Körpers, Strahlung zu emittieren bzw. zu absorbieren ist sehr stark von der Art des Körpers abhängig, weshalb jedem Körper ein *Emissionsvermögen* E (pro Einheitsfläche abgestrahlte Leistung) und ein *Absorptionsgrad* α (Verhältnis der absorbierten zur auftreffenden Strahlung) zugeordnet.

13.2 Der Schwarze Körper

Als schwarzen Körper bezeichnen wir einen Körper bei dem der Absorptionsgrad $\alpha = 1$ ist, der also alle auf ihn treffende Strahlung absorbiert. Er hat gleichzeitig das höchste denkbare Emissionsvermögen eines Temperaturstrahlers und wird deshalb auch als *schwarzer Strahler* bezeichnet. Daher wird auf sein Emissionsvermögen E_{schwarz} das Emissionsvermögen sämtlicher anderer Strahler zurückgeführt. Das wohl beste Modell für den schwarzen Körper ist der *Hohlraumstrahler*, ein Hohlraum mit einem kleinen Loch in der Wand.



Lichtstrahlen, die durch das Loch ins Innere gelangen, werden vielfach reflektiert und gestreut, bis sie schließlich absorbiert werden. Es besteht nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Strahl wieder durch das Loch nach außen gelangt. Dieses erscheint daher absolut schwarz. Heizt man die Wände des Hohlraums, tritt aus der Öffnung Strahlung aus, die bei höherer Temperatur sichtbar wird. Selbstverständlich ist das Loch dann nicht mehr schwarz. Die Verteilung der Strahldichte auf das Spektrum ist temperaturabhängig und folgt folgenden Isothermen:



13.3 Das Kirchhoffsche Gesetz

Das Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass ein Körper mit hohem Absorptionsgrad α auch viel Strahlung emittiert. Genauer gilt sogar: Der Emissionsgrad ε , also das Verhältnis des Emissionsvermögens zum Emissionsvermögen des schwarzen Strahlers, ist gleich dem Absorptionsgrad α . Damit gilt

$$\alpha = \varepsilon$$

oder für das Emissionsvermögen E

$$\frac{E}{\alpha} = E_{\text{schwarz}}$$

also

$$E = \alpha E_{\text{schwarz}} = \varepsilon E_{\text{schwarz}}$$

13.4 Die Gesetze der optischen Strahlungsenergie und -leistung

13.4.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Mit Hilfe des Modells des schwarzen Körpers fand Max Planck eine gute Beschreibung der Leistungsverteilung. Dabei muss aber davon ausgegangen werden, dass optische Strahlung quantisiert ist, d.h. dass ein emittierender Oszillator Energie nur in ganzzahligen Vielfachen eines elementaren Energiequantums aufnehmen und abgeben kann. Damit gilt

$$\Delta E = h\nu$$

mit der Strahlungsfrequenz ν und der Naturkonstanten⁵ $h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{Js}$, welche als *plancksches Wirkungsquantum* bezeichnet wird. Dadurch werden nun also die Energiewerte des Oszillators diskret. Wenn nun n_a die Teilchenzahl der angeregten, n_0

⁵aus Bergmann, Schäfer: „Lehrbuch der Experimentalphysik“, Band 3, Walter de Gruyter, 1993

die der nicht angeregten Atome ist, so ist deren Häufigkeitsverteilung im thermischen Gleichgewicht durch die *Boltzmann-Verteilung* gegeben:

$$\frac{n_a}{n_0} = e^{\frac{-W}{kT}} = e^{\frac{-h\nu}{kT}}$$

Der Energieaustausch zwischen Teilchen und Strahlung kann auf verschiedene Arten stattfinden:

- Teilchen absorbieren Strahlung mit der Energie $\Delta E = h\nu$. Die Häufigkeit ist dabei proportional zur Konzentration der unangeregten Teilchen und zur Intensität der Strahlung im entsprechenden Frequenzbereich.

$$\frac{n_{\text{Absorptionen}}}{\text{m}^3\text{s}} = B\rho(\nu, T)n_0d\nu$$

- Atome emittieren Strahlung mit der Energie $\Delta E = h\nu$. Die Häufigkeit solcher spontaner Emissionen ist von der Anzahl der angeregten Teilchen abhängig:

$$\frac{n_{\text{spontan}}}{\text{m}^3\text{s}} = An_a$$

- Teilchen strahlen ihren Energievorrat synchron mit dem einfallenden Feld ab: Die erzwungene oder stimulierte Emission (kommt z.B. im Laser vor). Diese erzwungene Emission ist gerade die Umkehrung der Absorption und hat daher die selbe Gleichung für die Anzahl der Vorgänge, allerdings diesmal von der Anzahl der angeregten, anstatt der nicht angeregten Atome abhängig:

$$\frac{n_{\text{erzwungen}}}{\text{m}^3\text{s}} = B\rho(\nu, T)n_a d\nu$$

Für ein Gleichgewicht muss die Anzahl der Emissionen gerade der der Absorptionen entsprechen, also

$$B\rho(\nu, T)n_0d\nu = An_a + B\rho(\nu, T)n_a d\nu$$

oder mit der Boltzmann-Verteilung

$$B\rho(\nu, T)n_0d\nu = An_0e^{\frac{-h\nu}{kT}} + B\rho(\nu, T)n_0e^{\frac{-h\nu}{kT}} d\nu$$

Damit lässt sich die Teilchenkonzentration herauskürzen und wir erhalten für die spektrale Energiedichte

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{Ae^{\frac{-h\nu}{kT}}}{B(1 - e^{\frac{-h\nu}{kT}})} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Die Konstante A/B ergibt sich aus dem Eigenschwingungsspektrum eines Hohlraums zu

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}d\nu$$

Somit erhalten wir das *Plancksche Gesetz* für die spektrale Energiedichte:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

13.4.2 Das Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die Leistungsdichte in einem von einem schwarzen Strahler erfüllten Hohlraum, welche gerade der Fläche unter einer Isothermen im Diagramm zur Verteilung der Strahlungsenergie (s. oben) entspricht, wird durch das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* beschrieben. Bis auf den Faktor c (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) ist diese identisch mit der spezifischen Ausstrahlung des schwarzen Körpers, also mit der Energie, die ein m^2 seiner Oberfläche in alle Raumrichtungen abstrahlt. Wir müssen also das Plancksche Strahlungsgesetz über alle Frequenzen integrieren:

$$R = \frac{c}{2} \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu$$

Mit der Substitution $x = h\nu/kT$ wird das Integral gelöst:

$$R = \frac{4\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{4\pi^4 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = 11,34 \cdot 10^{-8} T^4$$

Nach einer Seite strahlt eine schwarze Fläche A , der Temperatur T also die Leistung

$$P = \sigma A T^4$$

mit der *Stefan-Boltzmann-Konstanten*⁶

$$\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

13.4.3 Das Rayleigh-Jeanssche Gesetz

Für sehr kleine Frequenzen ν (also für $h\nu \ll kT$ und somit $e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT$) können wir eine Näherung zum Planckschen Gesetz einführen, und erhalten dabei das *Rayleigh-Jeanssche Gesetz*:

$$\rho(\nu, T) d\nu \approx \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu$$

13.4.4 Das Wiensche Strahlungsgesetz

Auch das *Wiensche Strahlungsgesetz* ist eine Näherung zum Planckschen Gesetz, allerdings für sehr große Frequenzen ν , also $h\nu \gg kT$ und somit $e^{h\nu/kT} \gg 1$. Damit gilt dann

$$\rho(\nu, T) d\nu \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

⁶ aus Bergmann, Schäfer: „Lehrbuch der Experimentalphysik“, Band 3, Walter de Gruyter, 1993

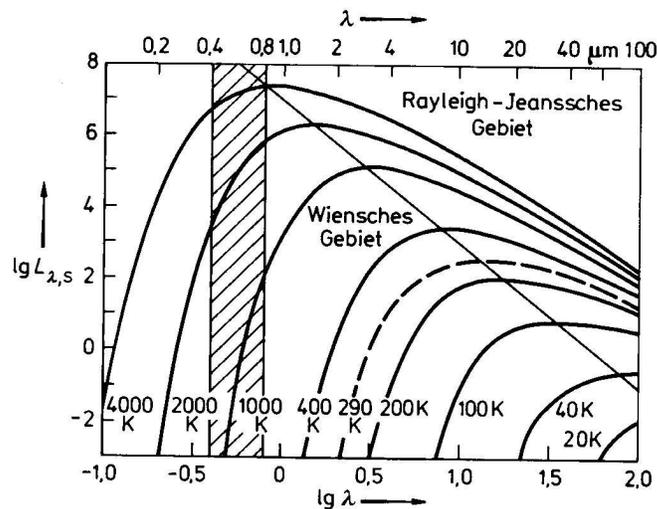
13.4.5 Das Wiensche Verschiebungsgesetz

Wenn man das Plancksche Strahlungsgesetz nach der Frequenz ableitet und Null setzt, erhält man die Frequenz, bei der das Maximum der schwarzen Strahlungsdichte liegt. Nach dem *Wienschen Verschiebungsgesetz* gilt

$$\nu_m = 2,82 \frac{k}{h} T = 5,88 \cdot 10^{10} \frac{\text{Hz}}{\text{K}} \cdot T$$

Die entsprechende maximale Energiedichte, die bei dieser Frequenz erreicht wird ist dann

$$\rho(\nu_m, T) d\nu = \frac{8\pi h \nu_m^3}{c^3 (e^{2,82} - 1)} d\nu = 35,7 \frac{k^3}{c^3 h^2} T^3 d\nu$$

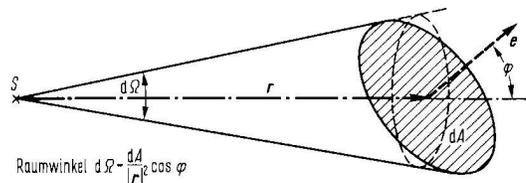


13.5 Die Abhängigkeit der Strahlungsleistung vom Raumwinkel

Die Intensität einer von einer Fläche emittierten Strahlung ist in Richtung der Flächennormalen maximal (I_0). Für die Intensität in eine beliebige Raumrichtung unter dem Winkel ϑ zur Flächennormalen gilt nach dem *Lambertschen Gesetz*

$$I(\vartheta) = I_0 \cos \vartheta$$

Für die folgende Berechnung ist es Notwendig, den Begriff des Raumwinkels zu definieren:



Wir sagen, die Fläche dA in der Abbildung wird von S aus unter dem Raumwinkel $d\Omega$ gesehen, wenn gilt:

$$d\Omega = \frac{\cos \varphi dA}{r^2}$$

wobei φ der Winkel zwischen der Flächennormalen e und dem Radiusvektor und r der Abstand der Fläche dA zu S ist.

Außerdem gilt für die Strahlungsstärke eines Strahlers

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

mit dem Strahlungsfluss (Leistung) $d\Phi$. Dadurch erhalten wir zusammen mit dem Gesetz von Lambert

$$I_0 = \frac{dP_0}{d\Omega_0} = \frac{dP_0}{d\Omega_0}$$

Strahlt der Strahler gleichmäßig aus, so gilt

$$I_0 = \frac{dP_0}{d\Omega_0} = \frac{P_0}{\Omega_0} = \frac{P_E}{A_E} r^2$$

mit der Aufgenommenen Leistung P_E und der Fläche A_E des Detektors und dessen Abstand r zum Strahler. Damit gilt also für die in den Halbraum abgestrahlte Leistung

$$\begin{aligned} P_S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P_E}{A_E} r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \frac{P_E}{A_E} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

Mit $\sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta)$ ergibt sich daraus

$$P_S = \pi \frac{P_E}{A_E} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\vartheta) d\vartheta = \pi \frac{P_E}{A_E} r^2 \left[-\frac{1}{2} \cos(2\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \frac{P_E}{A_E} r^2$$

Damit gilt nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\pi \frac{P_E}{A_E} r^2 = \sigma A_S (T^4 - T_0^4)$$

oder nach der aufgenommenen Strahlung P_E aufgelöst

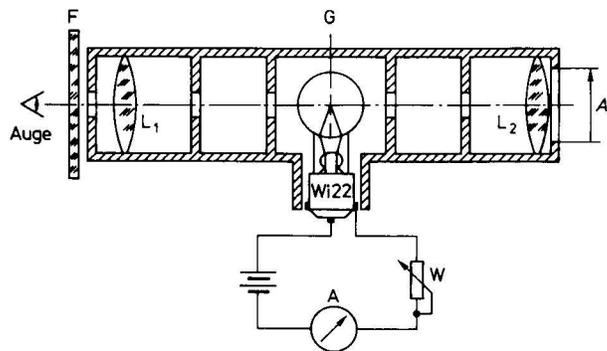
$$P_E = \frac{A_E \sigma A_S (T^4 - T_0^4)}{\pi r^2}$$

Ist der Detektor nun eine Kreisscheibe mit Radius R ($A_E = \pi R^2$), so ergibt sich für die von ihm detektierte Leistung für den Fall $r \gg R$

$$P_E = \frac{R^2 \sigma A_S (T^4 - T_0^4)}{r^2}$$

13.6 Pyrometrie

Mit Hilfe der Pyrometrie kann man die Temperatur von glühenden Stoffen messen. Die Messmethode basiert auf einem Vergleich der Farbstrahlung eines schwarzen Körpers mit der Abstrahlung des zu untersuchenden Objekts. Das *Pyrometer* ist ein Fernrohr, in dessen Zwischenbild-Ebene sich ein Glühfaden einer Wolframlampe befindet. Dessen Lichtstärke lässt sich über einen regler einstellen. Die Optik wird nun so eingestellt, dass der Glühfaden für das Auge scharf erscheint, und gleichzeitig das Objekt in der Glühfadenebene abgebildet wird. Wir sehen also den Glühfaden und das Messobjekt in einer Ebene. Nun wird die Lichtstärke des Glühfadens so eingestellt, dass dieser und das Messobjekt exakt die gleiche Helligkeit besitzen, und der Glühfaden daher verschwindet. Aus dem Strom, der durch den Glühfaden fließt, kann, sofern das Gerät kalibriert ist, die Temperatur des Messobjekts errechnet werden.



Man nennt diese ermittelte Temperatur die *spektrale Strahlungstemperatur* oder *schwarze Temperatur*. Es gilt, dass sie stets kleiner ist, als die tatsächliche Temperatur, da der schwarze Strahler schon bei einer niedrigeren Temperatur die gleiche Strahldichte erreicht, wie jeder beliebige andere Temperaturstrahler. Als *Farbtemperatur* bezeichnet man die Temperatur, die ein schwarzer Strahler hat, wenn er den gleichen Farbton wie das Messobjekt besitzt. Ihre Abweichung von der wahren Temperatur ist im Allgemeinen kleiner als die der schwarzen Temperatur. Farbtemperaturen lassen sich mit dem *Lummer-Brodhun-Photometrwürfel* messen.